М. С. Вербицкий

Начальный курс топологии в листочках: задачи и теоремы

Издательство МЦНМО
Москва, 2017

УДК 515.12
ББК 22.152
В31

Книга вышла при поддержке гранта РНФ (Соглашение № 14-21-00053 от 11.08.14).

Вербицкий М. С.

В31 Начальный курс топологии в листочках: задачи и теоремы. — М.: МЦНМО, 2017. — 352 с.

ISBN 978-5-4439-1036-9

Книга написана по материалам лекций, прочитанных в Независимом московском университете и на факультете математики Высшей школы экономики, и состоит из записок лекций и упражнений, предлагавшихся студентам. В курс включены результаты общей топологии, широко применяемые в анализе и геометрии. Для удобства читателя приводятся необходимые понятия и результаты теории категорий и теории множеств. Книга заканчивается начальными главами гомотопической топологии (накрытия, фундаментальная группа). Теоретический материал курса изложен как в лекциях, так и в упражнениях, которые можно изучать независимо от лекций.

ББК 22.152

Портреты математиков на с. 54, 156, 160, 167, 172, 193, 221, 274, 331 выполнены Юрием Сопельняком.

Научное издание

Михаил Сергеевич Вербицкий

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС ТОПОЛОГИИ В ЛИСТОЧКАХ: ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ

Подписано в печать 15.12.2016 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 22. Тираж 1500 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел.: (499) 241-08-04.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“». 121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-4439-1036-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II. ТОПОЛОГИЯ В ЗАДАЧАХ

ВВЕДЕНИЕ

Краткое описание

Эта книга рассчитана на студента младших курсов, знакомого с основами математического мышления (хорошего школьного учебника математики достаточно).

Можно читать ее по частям или целиком; например, решать задачи, пропуская текст лекций. «Геометрическая» часть задач и лекций (первый том) не очень связана с алгебраической (второй том, готовится к печати), а лекции (часть III) дополняют листки с задачами (часть II). Задачи разбиты на две группы (простые задачи без звездочки и сложные — со звездочкой), можно решать либо все простые задачи, либо все сложные, либо и те и другие.

Настоящая книга является первой частью записок курса, программа которого в немалой степени основана на программе матшколы и содержит материал, который в общих чертах известен хорошему матшкольнику. Предполагается, что полный курс будет состоять из двух частей, алгебры и геометрии. В этом томе читатель найдет задачи и лекции по геометрии и топологии. В приложении приводятся необходимые определения и задачи по основам анализа (определение поля вещественных чисел).

Геометрия (1-й том)

0. Метрические пространства. Последовательности Коши, пределы, пополнение метрических пространств. Теорема Хопфа—Ринова. Геодезические в полных метрических пространствах. Векторные пространства с нормой.
1. Теоретико-множественная топология (определение непрерывных отображений, компактность, отделимость, счетная база).
2. Лемма Урысона и теорема о метризации нормального топологического пространства со счетной базой.
3. Теорема Тихонова о компактности, равномерная сходимость, теорема Арцела—Асколи. Конструкция кривой Пеано.
4. Фундаментальная группа, свободные группы, гомотопическая эквивалентность, накрытия Галуа, конструкция универсального накрытия.

Алгебра (2-й том)

0. Группы, кольца, поля. Действительные и комплексные числа. Теорема Евклида—Гаусса об однозначности разложения на простые множители. Решение простейших диофантовых уравнений.
1. Конечномерные векторные пространства. Базис, размерность. Билинейные, полилинейные формы, двойственные пространства. Определение тензорного произведения векторных пространств. Симплектические и квадратичные формы.
2. Грассманова алгебра и определители.
3. Линейные операторы. Полупростота, нильпотентность. Теорема Кэли—Гамильтона. Жорданова нормальная форма.
4. Алгебраические расширения полей. Артиновы коммутативные алгебры. Расширения Галуа.
5. Представления конечных групп.
6. Основная теорема теории Галуа.

Последние 3—4 листка по геометрии и по алгебре повторяют друг друга, местами дословно. Дело в том, что группа Галуа устроена аналогично фундаментальной группе, а накрытие топологического пространства — конечному расширению полей. Пользуясь этой аналогией, Гротендик построил фундаментальную группу, пользуясь только алгебраическими методами (этот раздел математики называется *этальной геометрией*).

В. И. Арнольд прочел основанный на этой аналогии курс теории Галуа в физико-математической школе-интернате 18; впоследствии его лекции были записаны В. Б. Алексеевым («Теорема Абеля в задачах и решениях»).

В силу того что методы топологии и алгебры в этих разделах столь схожи, теорию Галуа, фундаментальную группу и накрытия можно (и нужно) изучать по одному плану. Взаимовлияние алгебраических и геометрических идей — это магистральное направление всей математики (а в последнее время — и теоретической физики), а математик, который владеет только одним из этих аппаратов, не лучше инвалида.

Материал этой книги должен быть в общих чертах известен хорошему матшкольнику и продвинутому первокурснику-математику.

Кроме этого, первокурсник должен знать основы анализа; их можно почерпнуть в учебнике В. А. Зорича «Математический анализ» и в учебнике Лорана Шварца «Анализ».

В этой книге анализа нет, потому что (в отличие от алгебры и геометрии) его преподавание на первом курсе университета ведется весьма интенсивно и начала анализа непрерывных и гладких функций на прямой худо-бедно усваивает каждый студент. К тому же изложить математический анализ в задачах не так просто.

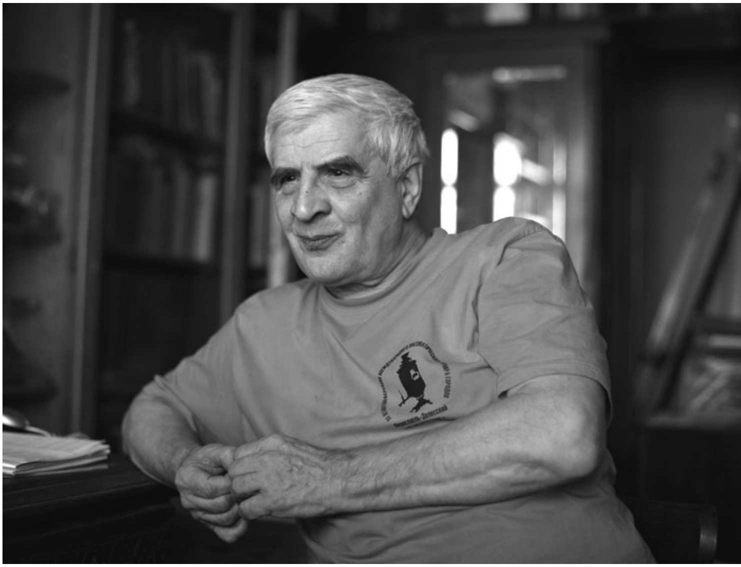
Соавтором и редактором листочков с задачами был Дмитрий Каледин, которому я безмерно благодарен. Спасибо Марине Прохоровой за редакторскую работу над задачами и А. Х. Шеню за ряд ценных замечаний. Немало исправлений было получено от Виктора Прасолова и Ивана Ремизова, которым я донельзя благодарен, а также от других людей, тоже чрезвычайно достойных и замечательных. Отдельная благодарность студентам, без которых это сочинение не было бы даже начато.

Структура книги отражает программу, составленную А. Х. Шенем, В. А. Гинзбургом и другими преподавателями матккласса 57 школы, где учился автор. Другим источником идей и вдохновения были учебники «Теорема Абеля в задачах и решениях» В. Б. Алексеева и «Теоремы и задачи функционального анализа» А. А. Кириллова и А. Д. Гвишиани.

Матклассы: обучение по листочкам

В 1970-е гг. в московских матшколах кристаллизовалась необычная форма обучения математике. Ее возникновение обыкновенно связывают с именем Н. Н. Константинова, который работал в 57, 91 и 179 школах. По этой системе выучились сотни матклассов, и каждый преподаватель вносил нечто свое в программу и в подход к обучению. Самым известным на настоящий момент практиком матшкольного обучения по листочкам является Б. М. Давидович, завуч московской школы 57; автора этой книги учили А. Х. Шень, В. А. Гинзбург, Б. П. Гейдман и А. Ю. Вайнтроб, и он благодарен им сверх всякой меры.

Здесь был бы уместен исторический очерк матшкольного образования, но пока придется ограничиться этим куцым сообщением. Автор заранее приносит извинения всем, кого он не упомянул.



Николай Николаевич Константинов

Система эта в канонической форме устроена так. Обучение математике в матклассе разбито на два параллельных предмета. Обычная математика (алгебра и геометрия) преподается в рамках школьной программы, при этом форма обучения не отличается от привычной чиновникам РОНО и проверяющим комиссиям. Параллельно с этим профессиональные математики, аспиранты и студенты, не числящиеся формально учителями, ведут уроки «специальной математики», или же «матанализа». Часы делятся примерно поровну, но само обучение «специальной математике» мало соотносится со школьной программой, и занятия устроены принципиально иначе.

На уроках «специальной математики» никто не стоит у доски с указкой и мелом; всё (или почти всё) общение школьника с преподавателями ведется за партой и тет-а-тет либо в походах. Школьникам выдается листок с задачами, обыкновенно — по одному или два в неделю; через какое-то время после выдачи листочка студенты должны «сдать задачи», т. е. рассказать их решения преподавателям на уроке. При такой системе на класс из 30 человек требуется где-то 5—10 преподавателей.

Задачи разбиты на задачи «без звездочки» (сдача этих задач обязательна для всех) и более сложные задачи, отмеченные одной или двумя звездочками. Задачи с одной звездочкой должны быть доступны самым продвинутым школьникам в классе. Задачи с двумя звездочками весьма сложны — уровня студенческих научных олимпиад либо сложных (а часто и нерешенных) научных проблем. Для индивидуального обучения эта система весьма удобна — школьник может выбирать себе задачи по плечу, решая либо сравнительно простые задачи, доступные начинающим, либо задачи со звездочкой, требующие хорошего понимания материала.

Преподаватели подбираются из числа энтузиастов подобного обучения, профессиональных математиков и студентов; в основном это выпускники матклассов. Они разъясняют школьникам непонятные места. Также школьникам не возбраняется находить решение задач в книжках либо (когда совсем припрет) спрашивать у товарищей. Принято считать, что эта часть обучения не менее важная, чем собственно решение задач. Действительно, свободное обращение с литературой и способность рассказать либо выслушать нечто математическое не менее важна, чем решение задач.

Объем информации, усваиваемый школьником при такой системе, вполне сравним с полученным из обычной школьной системы обучения, несмотря на отсутствие «уроков» в обычном смысле. Теоретический материал размещается по возможности в тексте задач, таким образом, любой школьник, успешно сдавший задачи, будет обязан усвоить и освоить теорию.

На протяжении 1980-х гг. программа матклассов установилась окончательно. В общих чертах идеализированная программа матшколы устроена примерно так.

Обучение ведется 3 или 4 года. В первый год школьники учатся обращению с множествами (элементарной теории множеств, классам эквивалентности, отображениям, наложениям, вложениям и биекции, равномощности, счетным и континуальным множествам). Излагаются начала аксиоматического подхода. Определяются понятия элементарной алгебры: группы, кольца и поля. Вводится алгоритм Евклида, его используют для доказательства однозначности разложения на множители в кольце целых чисел.

На второй год школьники изучают основы анализа (пределы, ряды, непрерывность и дифференцируемость функций на прямой), свойства логарифма и экспоненты. Излагается аксиоматическое определение вещественных чисел (обыкновенно через последовательности Коши). Проходят комплексные числа и их геометрическую интерпретацию. Выводят из свойств комплексных чисел тождества для тригонометрических функций, как обычные (формула косинусов и синусов), так и необычные (формула для $\sin(nx)$ и т. д.). Также изучают начала линейной алгебры (конечномерные пространства, базис, размерность).

На третий год школьники изучают основы теории метрических пространств (компактность, пополнение) и топологии (аксиоматическое определение топологического пространства, топологические свойства метрических пространств, аксиомы отделимости). В курсе алгебры школьники усваивают определение p-адических чисел, классификацию конечных полей и элементы теории Галуа.

Как читать эту книгу

В этой книге есть две независимые части, основанные на одной и той же программе: цикл лекций и цикл задач. Они в немалой степени повторяют друг друга. По сути это два разных курса, излагающих один и тот же материал.

Листочки составлены таким образом, чтобы решение всех задач со звездочкой из одного листка было несколько менее трудоемко, чем решение всех задач без звездочки из этого же листка. Студенту имеет смысл прочесть все задачи и усвоить их формулировку, затем решить все задачи со звездочкой, если задачи без звездочки для них не трудны и их решение кажется бессмысленной затратой труда. Задачи с восклицательным знаком надо решать всем.

Таким образом, каждый листочек представляет собой сразу два курса — один для продвинутых студентов, которые в общих чертах знают программу, другой — для начинающих.

Формально говоря, для понимания листочков достаточно школьной программы и знания основных определений теории множеств (вложение, наложение, ограничение отображения, классы эквивалентности). Многие школьные учебники (например, учебник Колмогорова) уже содержат все нужные определения.

Для решения некоторых задач со звездочкой (особенно в конце курса геометрии) и хорошего понимания остального материала необходимо немного подробнее ознакомиться с теорией множеств, в частности, научиться пользоваться леммой Цорна. Об этом см. главу 4 части I.

Остальные лекции читать не обязательно, для владения материалом вполне достаточно прорешать задачи. С другой стороны, пытаться решать задачи подряд и в изоляции от преподавателей и товарищей тоже не очень полезно — всегда есть риск застопориться на какой-то тривиальной вещи и застрять надолго. В нормальной учебной обстановке такая проблема решается просто: надо спросить другого студента или преподавателя. Если их нет, надо походить, подумать, почитать книжку, попробовать изучить контекст, подумать о том, как исторически возникли такие вещи в математике. Проще всего выяснить это (если знать английский язык), сделав поиск на нужные ключевые слова в Интернете. Но в случае, если Интернет не работает, или если это слишком трудно, или просто чтобы отдохнула голова, можно посмотреть лекции, сопутствующие этому листочку. Они адресованы студенту, которому задач недостаточно, но читать их можно и независимо.

Также в лекциях содержится английский перевод ключевых слов и краткий список литературы, полезной для данного предмета.

Важное замечание. В чтении книг по математике есть две проблемы, которые не возникают при очном обучении. Первая проблема — опечатки: большинство научных книг содержат опечатки, и немало. Студент или школьник, не готовый к этому, может провести несколько месяцев в попытках придать смысл заявлению, которое смысла не имеет, потому что сделано по ошибке. Дорогие читатели! Никогда не думайте, что автор умнее вас и видит что-то, чего вы не видите. В большинстве случаев дурак не читатель, а автор, который нечто важное исказил, пропустил и напортил.

Никакого вреда в этом нет: чтение книги должно быть занятием творческим; в идеале — совместным творчеством автора и читателя. Для этого некоторые авторы специально добавляют в свои книги опечатки, чтобы студентам было о чем задуматься.

Вторая проблема, тоже весьма неприятная — люди любят читать книги подряд. При этом, дойдя до непонятного места, люди читают это место снова и снова, до полного отупения. Это неправильно! Надо открыть книжку в другом месте и читать там, а непонятное место перечитать потом.

Часть I

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Глава 1

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. О математической строгости

«Точные науки» отличаются от «социо-гуманитарных» тем, что в точных науках утверждение можно проверить воспроизводимым экспериментом либо наблюдением. Роль воспроизводимого наблюдения в математике играет *доказательство*.

Идея доказательства восходит к древним грекам; она дошла до наших дней практически без изменений. Математическая теория строится *аксиоматически*. В основе лежат несколько утверждений — аксиом, принятых как нечто абсолютно верное; всё остальное выводится из аксиом посредством формальной логики.

При таком подходе доказательству подлежат зачастую вещи, интуитивно очевидные. Именно это и называется *математической строгостью*.

На протяжении истории стандарты математической строгости менялись довольно часто. Отказ от строгости в пользу *интуиции*, *мышления по аналогии* и *эвристических соображений* — дело не всегда вредное. Многие современные математики считают, что принятые в конце XX века стандарты математической строгости (восходящие к Гильберту и к французской группе Бурбаки) излишни. Немало об отрицательном влиянии Гильберта и Бурбаки говорил В. И. Арнольд.

Отчасти он прав — большинство эвристических соображений можно довести до математически строгих доказательств посредством рутинной (и не всегда полезной) работы. Эту точку зрения лучше всего высказали сами Бурбаки («Теория множеств»).

> ...Математик, желающий убедиться в полной правильности, или, как говорят, «строгости» доказательства или теории, отнюдь не прибегает к одной из тех полных формализаций, которыми мы сейчас располагаем, и даже большей частью не пользуется частичными и неполными формализациями, доставляемыми алгебраическим и другими подобными исчислениями. Обыкновенно он довольствуется тем, что

> приводит изложение к такому состоянию, когда его опыт и чутье математика говорят ему, что перевод на формализованный язык был бы теперь лишь упражнением (...) в терпении. Если возникают сомнения, то в конечном счете они относятся именно к возможности прийти без двусмысленности к такой формализации — употреблялось ли одно и то же слово в разных смыслах в зависимости от контекста, нарушались ли правила синтаксиса бессознательным употреблением способов рассуждения, не разрешаемых явно этими правилами, была ли, наконец, совершена фактическая ошибка. (...) Текст редактируется, все больше и больше приближаясь к формализованному тексту, пока, по общему мнению математиков, дальнейшее продолжение этой работы не станет излишним.

Излишняя увлеченность формальными методами, возможно, действительно вредна, но в обучении студентов без математической строгости не обойтись. Профессиональный математик способен легко определить, когда эвристическое рассуждение можно *формализовать*, т. е. довести до любой требуемой степени математической строгости; но эту способность можно приобрести, только упражняясь в получении формально строгих доказательств.

1.2. О формальном методе

Формальный метод восходит к Гильберту, который надеялся, что с его помощью удастся обосновать математику. Его надежды не оправдались из-за теорем Гёделя о неполноте. Но и сейчас формальный метод остается простейшим (и лучше всего развитым) методом построения оснований математики.

Формальная версия математики устроена так. Математическая теория описывает свойства определенных объектов с помощью аксиом и правил вывода. Сущность этих объектов с формальной точки зрения неинтересна: по замечанию Гильберта, *«следует добиться того, чтобы вместо точек, прямых и плоскостей с равным успехом можно было говорить о столах, стульях и пивных кружках»*. Правила вывода суть формальные операции над утверждениями; верным (доказанным) называется такое утверждение, которое можно вывести из аксиом.

Давид Гильберт (David Hilbert, 1862—1943)

Формальный метод подразумевает, что никакой связи между математическим миром и миром, окружающим нас, нет вовсе. В качестве базовых понятий и аксиом можно брать что угодно. Для того чтобы этот метод обоснования математики считался действенным, необходимо (как минимум) доказать, что из использованного набора аксиом нельзя получить противоречия: иначе в этой теории будет верно *любое* утверждение. Действительно, «импликация с ложной посылкой истинна». Это свойство системы аксиом называется *непротиворечивостью*.

Также нужно доказать, что любое утверждение можно доказать либо опровергнуть исходя из аксиом. Это свойство теории называется *полнотой*. В противном случае формальное описание математических объектов неадекватно их сущности.

Дело в том, что математическим объектам можно приписать реальность безотносительно к аксиомам, которые ими описываются. Скажем, аксиомы арифметики описывают теорию чисел, науку о решении диофантовых уравнений (уравнений в целых числах). Утверждение *«полиномиальное уравнение $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0$ не имеет целочисленных решений $t_1, \ldots, t_n$»* может выводиться из аксиом арифметики (аксиом Пеано), а может и не выводиться. Во втором случае может оказаться, что уравнение имеет решения. Может случиться и так, что из аксиом арифметики невозможно вывести ни наличия, ни отсутствия решений [1].

Когда в какой-то теории есть утверждение Q, которое нельзя вывести из аксиом, и при этом нельзя вывести из аксиом его отрицание «не Q», эта система аксиом называется *неполной*.

«Математической реальности» такая система аксиом, очевидно, неадекватна. Действительно, предположим, что исходя из аксиом Пеано нельзя ни доказать, ни опровергнуть утверждение Q «полиномиальное уравнение $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0$ не имеет целочисленных решений $t_1, \ldots, t_n$». В этой ситуации уравнение $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0$ таки не имеет решений, ибо, если бы такое решение было, мы бы могли его подставить в уравнение и получить теорему «Q ложно».

В этой ситуации разговор о числах, апеллирующий к утилитарному пониманию числа, гораздо содержательнее разговора о формальных аксиомах и следствиях. Действительно, формально получить Q как следствие аксиом нельзя, ибо теория неполна; но Q тем не менее верно, что ясно из невозможности его опровергнуть (у уравнения либо нет решений, либо они есть — третьего не дано).

Гильберт надеялся, что система аксиом Пеано (и шире — система аксиом теории множеств, лежавшей в основе математики того времени) полна и непротиворечива. Доказательство этого фактически доказало бы эквивалентность формального метода и утилитарного (основанного на естественно-научной интуиции) представления о числах и о математике.

Этого не случилось.

К концу 1920-х гг. формальная программа Гильберта близилась к завершению. В 1930 г. польский математик Альфред Тарский развил систему аксиом для элементарной геометрии, более формальную и строгую, чем у Гильберта, и доказал, что эта система аксиом полна и непротиворечива.

Но в самом начале 1930-х гг. совершенно неожиданно Курт Гёдель доказал две теоремы о неполноте, которые не оставили камня на камне от программы Гильберта.

---

1 Это утверждение известно как «Десятая проблема Гильберта». Оно было доказано Юрием Матиясевичем в 1970 году.

Гёдель доказал, что ни одна достаточно богатая (например, содержащая среди своих аксиом аксиомы Пеано) формальная теория не может быть полна; также он доказал, что доказательство ее непротиворечивости получить *невозможно*.

Курт Гёдель (Kurt Gödel, 1906—1978)

Формальный метод потерпел поражение, а аксиоматическое построение математики было значительно дискредитировано.

1.3. Теория множеств и ее аксиоматизация

Дополнительную остроту кризису придавали *парадоксы теории множеств*. Дело в том, что в представлении Гильберта и современных ему математиков естественным фундаментом для математики могла быть только теория множеств, разработанная Кантором в конце XIX века. Но в начале XX века в теории множеств обнаружились неустранимые противоречия.

«Наивная теория множеств» имеет дело с *множествами* — любыми совокупностями объектов, которые называются «элементами множества». Утверждение «x является элементом X» записывается как $x \in X$. Его отрицание записывается как $x \notin X$.

Можно говорить о «множестве всех последовательностей элементов данного множества», «множестве всех букв алфавита», «множестве всех слов из букв данного алфавита» и проделывать над такими множествами естественные операции (пересечения, объединения и т. п.). *Подмножеством* множества X называется любое множество X', обладающее тем свойством, что все элементы X' являются элементами X. Тот факт, что X' является подмножеством множества X, записывается как $X' \subset X$.

«Пустое множество» (обозначается $\varnothing$) не имеет элементов вовсе.

Кантор не добивался абсолютной строгости в теории множеств. Первая попытка построить теорию множеств строго и аксиоматически принадлежала Готлобу Фреге, который предполагал, что получится логически вывести всю математику из самоочевидных постулатов теории множеств (этот подход к основаниям математики называется «логицизмом»). Построенную Фреге теорию называют «наивной теорией множеств». Она неверна (содержит противоречия).

Самое простое из противоречий наивной теории множеств было обнаружено Бертраном Расселом в 1901 году. Рассмотрим множество A всех множеств X, не являющихся собственным элементом. Будет ли A принадлежать A? Если A не принадлежит A, то A должно быть своим элементом, т. е. формальным следствием утверждения $A \notin A$ является $A \in A$.

Этот парадокс — форма хорошо известного «парадокса цирюльника». В одном селе живет цирюльник Х., который бреет всех жителей, кроме тех, которые бреют себя сами. Бреет ли цирюльник Х. сам себя?

Со времен Рассела получено множество парадоксов наивной теории множеств. Они все сводятся, грубо говоря, к тому, что строится «слишком большое» множество, которое и приводит к парадоксам.

Рассел и Уайтхед построили версию теории множеств, свободную от известных парадоксов, но она оказалась неудобна. Более удобная версия аксиоматической теории множеств была разработана Э. Цермело в 1908 году. В 1922 г. А. Френкель дополнил эту систему аксиом; современная версия аксиоматической теории множеств называется *система аксиом Цермело—Френкеля* (ZF). Отличие этой версии теории множеств от наивной было в том, что «излишне больших» множеств Цермело и Френкель не допускали. Их теория оперировала не «всеми» множествами, а только теми, существование которых можно доказать (вывести из аксиом). Такие множества конструируются из других множеств посредством набора четко определенных операций. И парадоксальные объекты, такие как «множество всех множеств», в системе аксиом Цермело—Френкеля просто *не существуют*.

Довольно долго (вплоть до Гёделя) математики надеялись, что теория множеств Цермело—Френкеля полна и непротиворечива. Сейчас ясно, что она неполна и, возможно, противоречива (во всяком случае, непротиворечивость этой системы аксиом доказать невозможно, и это факт). Тем не менее, в большинстве версий «оснований математики» математика базируется на теории множеств.

В обучении математике нам приходится поступать так же. Отчасти это связано с тем, что альтернативные подходы (конструктивная математика, теория категорий и другие) труднее и менее известны. А отчасти — с тем, что базовые понятия теории множеств (отображения, произведение множеств, подмножества, биекции, классы эквивалентности) необходимы математику в любом случае.

Бурбаки комментируют возможность противоречий в основаниях математики таким образом («Теория множеств»).

> За 40 лет с тех пор, как сформулировали с достаточной точностью аксиомы Теории множеств и стали извлекать из них следствия в самых разнообразных областях математики, еще ни разу не встретилось противоречие, и можно с основанием надеяться, что оно и не появится никогда.
>
> Если бы дело и сложилось иначе, то, конечно, замеченное противоречие было бы внутренне присуще самим принципам, положенным в основание Теории множеств, а потому нужно было бы видоизменить эти принципы, стараясь по возможности не ставить под угрозу те части математики, которыми более других дорожат. И ясно, достичь этого тем более легко, что применение аксиоматического метода и формализованного языка позволит формулировать эти принципы более четко и отделять от них следствия более определенно. Впрочем, приблизительно это и произошло недавно, когда устранили «парадоксы» Теории множеств принятием формализованного языка... Подобную ревизию следует предпринять и в случае, когда этот язык окажется в свою очередь противоречивым.

1.4. Терминология и библиография

По-английски теория множеств называется set theory, Цермело—Френкель пишется Zermelo—Fraenkel. В английской версии Википедии основания математики изложены весьма подробно, особенно экзотические и альтернативные версии. Популярное изложение формального метода и его истории есть в «Теории множеств» Бурбаки. Полезный учебник по теории множеств — «Теория множеств» Куратовского и Мостовского. Биография Гильберта — книга Констанс Рид «Гильберт».

Философские аспекты теорем Гёделя подробно обсуждаются в книгах Р. Пенроуза «Новый ум короля» («The Emperor's New Mind») и «Тени разума» («Shadows of the Mind»).

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1. Обозначения теории множеств

Г. Кантор определял множество так: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое». Говоря чуть более строго, «множество — это единое имя для совокупности всех объектов, обладающих данным свойством» (тоже Кантор).

В наивной теории множеств множество есть «любая совокупность объектов, называемых элементами множества». Во избежание противоречий, которыми славится наивная теория множеств, это определение придется несколько изменить, отбросив «излишне большие» классы множеств. Множества *равны*, если они составлены из одинаковых элементов.

Множество S следует понимать как своего рода черный ящик — для каждого объекта x этот черный ящик умеет отвечать на вопрос: «Принадлежит ли x множеству S?» Больше ничего S делать не умеет. Два множества *равны*, или же *совпадают*, если они отвечают на этот вопрос одинаково.

Если x принадлежит S, это обозначается $x \in S$ или $S \ni x$, если не принадлежит, это обозначается $x \notin S$. Это обозначение (как и большинство других обозначений для логических операторов: $\exists$, $\cap$, $\cup$ и так далее) придумал Джузеппе Пеано в конце XIX века. В этих обозначениях равенство множеств можно записать так:

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow (\forall x\colon\ x \in S_1 \Leftrightarrow x \in S_2),$$

т. е. множества S_1 и S_2 равны тогда и только тогда, когда для любого x условие $x \in S_1$ равносильно условию $x \in S_2$. Значок $\forall$ обозначает «для каждого», а $\Leftrightarrow$ — эквивалентность утверждений («тогда и только тогда», «равносильно»).

Подмножеством множества S называется множество S_1, целиком содержащееся в S. Это обозначается $S_1 \subset S$ (обозначение введено Эрнстом Шрёдером в 1890 г.). Используя логические обозначения, это можно записать так:

$$S_1 \subset S \Leftrightarrow (\forall x\colon\ x \in S_1 \Rightarrow x \in S).$$

В этой формуле стрелка $\Rightarrow$ обозначает импликацию («следовательно»). Иногда это же самое записывают как $S \supset S_1$. Если $S_2 \subset S_1$ и $S_1 \subset S_2$, множества S_1 и S_2 равны.

Подмножество $S_1 \subset S$, не совпадающее с S, называется *собственным подмножеством*. Это обозначается так: $S_1 \subsetneq S$.

Пустое множество обозначают $\varnothing$; это обозначение впервые появилось у Бурбаки и принадлежит Андре Вейлю.

Множество всех подмножеств множества S обозначается 2^S.

Задача 2.1. Пусть S — конечное множество из s элементов. Докажите, что 2^S — конечное множество из 2^s элементов.

Если S_1 и S_2 — два множества, то можно говорить об их *объединении* $S_1 \cup S_2$ (множестве всех элементов, принадлежащих S_1 или S_2) и *пересечении* $S_1 \cap S_2$ (множестве всех элементов, принадлежащих S_1 и S_2). Формально объединение определяется так:

$$S_1 \cup S_2 = \{x\colon (x \in S_1) \vee (x \in S_2)\}. \tag{2.1.1}$$

В этой формуле $\{x\colon P(x)\}$ обозначает «множество всех x, удовлетворяющих $P(x)$» (это обозначение принадлежит Кантору). Символы $\vee$ и $\wedge$ означают «или» и «и» (использовать $\vee$ для обозначения дизъюнкции первым стал Б. Рассел; вместо «и» Рассел использовал точку).

Задача 2.2. Запишите $S_1 \cap S_2$ формулой, аналогичной (2.1.1).

Если заданы множества S_1 и S_2, то можно определить *произведение* $S_1 \times S_2$ — множество всех пар (x, y), где $x \in S_1$, $y \in S_2$.

Дополнение множества A до подмножества $B \subset A$ — множество всех $a \in A$, которые не лежат в B. Дополнение обозначается $A \setminus B$.

2.2. Соответствия и отображения

Пусть S_1, S_2 — множества. *Соответствием*[1] называется любое подмножество $P \subset S_1 \times S_2$. Если пара (x, y) принадлежит P, то говорят: «Соответствие P выполнено для пары (x, y)». Это обозначается $P(x, y)$.

Соответствие обычно задается какой-либо формулой: например, если $S_1 = S_2 = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, то формулы $x < y$, $x > y$, $x \neq y$ задают соответствия.

1 Соответствие иногда называют *отношением*, или *бинарным отношением*. Это синонимы.

Отображением, или *функцией* $f\colon S_1 \to S_2$ называется такое соответствие $\Gamma_f \subset S_1 \times S_2$, что для каждого $x \in S_1$ существует единственный элемент $y \in S_2$, удовлетворяющий условию $(x, y) \in \Gamma_f$. Множество Γ_f в этой ситуации называется *графиком функции* f. *Значением* функции f на элементе $x \in S_1$ называется тот единственный элемент $y \in S_2$, для которого $(x, y) \in \Gamma_f$. Это обозначается так: $y = f(x)$.

Функцию часто задают формулами: если S_1 и S_2 — множества вещественных чисел, то формулы $x \to x^2$, $x \to |x|$, $x \to x + 2$ задают отображения.

Следует думать про функцию как про набор правил, ставящих в соответствие каждому $x \in S_1$ некоторый элемент множества S_2.

Отображение из множества в себя называется *преобразованием* множества. *Тождественное преобразование* множества S переводит каждый элемент $x \in S$ в себя. Его график называется *диагональю*. Тождественное преобразование S обозначается $\mathrm{Id}_S\colon S \to S$.

Если есть две функции $f\colon S_1 \to S_2$, $g\colon S_2 \to S_3$, то можно определить их *композицию* [1] $f \circ g$, ставящую в соответствие элементу $x \in S_1$ элемент $g(f(x)) \in S_3$.

Задача 2.3. Пусть $f\colon S_1 \to S_2$, $g\colon S_2 \to S_3$, $h\colon S_3 \to S_4$ — три функции. Докажите, что композиция удовлетворяет *свойству ассоциативности*

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Замечание 2.1. Иногда значок $\circ$ обозначает композицию отображений, примененную в другом порядке: не $g(f(x))$, а $f(g(x))$.

Если $f(x) = y$, то y называется *образом* элемента x, а x — *прообразом* y.

Образом множества S_1 (обозначается $f(S_1)$) при отображении $f\colon S_1 \to S_2$ называется множество всех $y \in S_2$, которые являются образами каких-то $x \in S_1$.

Прообраз подмножества $R_2 \subset S_2$ — множество всех элементов $x \in S_1$, переходящих в элементы R_2; *образ подмножества* $R_1 \subset S_1$ — совокупность всех элементов, полученных как образы элементов R_1. Образ подмножества обозначается $f(R_1)$, прообраз — $f^{-1}(R_2)$.

Ограничением функции $f\colon S_1 \to S_2$ на подмножество $R_1 \subset S_1$ называется функция $f|_{R_1}\colon R_1 \to S_2$, которая на каждом $x \in R_1$ принимает значение $f(x)$.

1 Чаще композицию обоначают $g \circ f$. — *Прим. ред.*

Функция $f\colon S_1 \to S_2$ называется *вложением*, или *инъекцией*, или *инъективным отображением*, если для разных $x, x' \in S_1$ их образы не равны: $f(x) \neq f(x')$. Инъекцию часто обозначают такой стрелочкой: $\hookrightarrow$.

Функция $f\colon S_1 \to S_2$ называется *наложением*, или *сюръекцией*, или *сюръективным отображением*, если $f(S_1) = S_2$; иначе говоря, каждый $y \in S_2$ является образом какого-то элемента S_1.

Если функция $f\colon S_1 \to S_2$ — одновременно наложение и вложение, то она называется *биекцией*, или *биективным отображением*, или *взааимно однозначным отображением*, или *обратимой*.

Задача 2.4. Пусть $f\colon S_1 \to S_2$ — биекция. Докажите, что существует такое отображение $g\colon S_2 \to S_1$, что композиция $f \circ g$ — тождественное преобразование множества S_1, а $g \circ f$ — тождественное преобразование множества S_2.

Определение функций через подмножества произведения принято в версии оснований математики, которая базируется на теории множеств. В других версиях оснований математики основным является понятие функции, заданной формулой либо каким-то алгоритмом, а множества определяются в терминах функций. Даже в аксиоматической теории множеств приведенное выше определение функции используется наряду с формально-логическим «функция, заданная формулой на языке Цермело—Френкеля» (высказывательная функция). Получить из «высказывательной функции» функцию в смысле вышеприведенного определения можно, воспользовавшись одной из аксиом («схемой подстановки»).

2.3. Отношения эквивалентности

Определение 2.2. Пусть на множестве S задано отношение[1] $\sim$, удовлетворяющее следующим условиям.

Рефлексивность: $x \sim x$ для любого $x \in S$.
Симметричность: $(x \sim y) \Leftrightarrow (y \sim x)$ для любых $x \in S$, $y \in S$.
Транзитивность: $((x \sim y)$ и $y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z)$ для любых $x, y, z \in S$.

Такое отношение называется *отношением эквивалентности*.

1 Отношение — это то же самое, что и соответствие, т. е. подмножество в $S \times S$.

Задача 2.5. Придумайте примеры отношений, которые

- рефлексивны и симметричны, но не транзитивны;
- рефлексивны и транзитивны, но не симметричны;
- транзитивны и симметричны, но не рефлексивны.

Определение 2.3. Пусть $(X, \sim)$ — множество, снабженное отношением эквивалентности. *Классом эквивалентности* элемента $x \in \in X$ называется множество всех $y \in X$, для которых $x \sim y$. *Представителем класса* S называется любой элемент $x \in X$, который лежит в этом классе.

Задача 2.6. Докажите, что в такой ситуации X разбито в объединение непересекающихся классов эквивалентности.

В силу этой задачи на X задано сюръективное отображение $\pi : X \to Y$ в множество Y классов эквивалентности, которое переводит элемент в его класс эквивалентности. Легко видеть, что любое сюръективное отображение $\pi : X \to Y$ получается таким образом.

2.4. Аксиоматическая теория множеств

Наивная теория множеств приводит к парадоксам. Источником этих парадоксов принято считать несуществование «слишком больших множеств». Аксиоматическая теория множеств имеет дело не со «всеми» множествами, а только с теми, существование которых может быть получено из аксиом.

Аксиоматическая теория множеств требует продвинутого логического аппарата. Большинство математиков не помнят этих аксиом и ими не пользуются. Вместо этого используется принцип «применением естественных операций над множествами получается множество». Под «естественными операциями» понимаются операции, описанные выше: взятие пересечения, объединения, произведения, подмножества и множества всех подмножеств.

В канонической форме, система аксиом Цермело—Френкеля (ZFC) состоит из 9 аксиом[1].

1 Довольно часто аксиомы 1—8 рассматриваются отдельно от аксиомы 9 (аксиомы выбора). Система аксиом Цермело—Френкеля без аксиомы выбора обозначается аббревиатурой ZF, с аксиомой выбора — ZFC, Zermelo—Fraenkel with Axiom of Choice.

1. *Аксиома объемности (экстенсиональности).* Два множества A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы:
$$(\forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)) \Rightarrow A = B.$$

2. *Аксиома пары.* Для любых множеств A и B существует такое множество C, что A и B являются его единственными элементами. Множество C обозначается $\{A, B\}$ и называется *неупорядоченной парой* множеств A и B. Если $A = B$, то C состоит из одного элемента.
3. *Аксиома выделения.* Пусть $\varphi(p)$ — свойство, которым может обладать множество p. Для каждого множества X существует подмножество $X_\varphi \subset X$, составленное из всех элементов $x \in X$, удовлетворяющих свойству φ.
4. *Аксиома объединения.* Для любого семейства множеств $\{A_\alpha\}$ существует множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из A_α:
$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \{x\colon\ \exists\alpha\ x \in A_\alpha\}.$$
В частности, для любых множеств A и B существует их объединение $A \cup B$:
$$A \cup B := \{x\colon\ (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Замечание 2.4. Отметим, что пересечение $A \cap B$ существует в силу аксиомы выделения.

5. *Аксиома степени.* Для любого множества S существует множество всех его подмножеств 2^S.

Замечание 2.5. Конечные множества в аксиоматической теории множеств строятся следующим образом. Множество из нуля элементов — $\varnothing$. Множество из одного элемента — это $\{\varnothing\}$, множество из двух элементов — это
$$\{\{\varnothing\}, \varnothing\},$$
множество из трех элементов —
$$\{\{\{\varnothing\}, \varnothing\}, \{\varnothing\}, \varnothing\}$$

и так далее. Аналогичным образом можно построить и бесконечное множество. Множество S называется *индуктивным*, если оно содержит $\varnothing$ и при этом если $x \in S$, то $x \cup \{x\} \in S$.

6. *Аксиома бесконечного множества.* Существует индуктивное множество.

Определение 2.6. Пусть на языке теории множеств Цермело—Френкеля задано свойство $\Phi(x, y)$, которым может обладать упорядоченная пара множеств x, y. Предположим, что для каждого x есть не больше одного y, для которого $\Phi(x, y)$ выполняется. В такой ситуации Φ задает «функцию» из класса множеств x, для которых y существует, переводящую x в этот (единственным образом определенный) y. Такая «функция» называется *высказывательной функцией*, а совокупность множеств, где она определена, — ее *областью определения*.

Отметим, что «высказывательные функции» не являются функциями в обычном смысле этого слова (см. раздел 2.2).

Область определения высказывательной функции — не обязательно множество. Скажем, область определения тождественной высказывательной функции

$$\Phi(x, y) \Leftrightarrow (x = y)$$

— это все множества, но совокупность всех множеств не образует множества (см. замечание I.3.6).

7. *Схема подстановки для высказывательной функции* Φ. Пусть $\Phi(x, y)$ — высказывательная функция, а X — множество, все элементы которого лежат в области определения Φ. Тогда существует множество Y, составленное из всех y, для которых существует такое $x \in X$, что верно $\Phi(x, y)$.

Замечание 2.7. «Схема подстановки»[1] — не аксиома, а «правило вывода», которое по каждой высказывательной функции строит свою аксиому. Иначе говоря, «аксиома 7» — это счетный набор аксиом, каждая из которых задана своей высказывательной функцией.

8. *Аксиома регулярности.* Любое непустое множество S содержит такой элемент $x \in S$, что $x \cap S = \varnothing$.

1 Так же, как и аксиома выделения. — *Прим. ред.*

9. *Аксиома выбора.* Пусть $\varphi\colon X \to Y$ сюръективное отображение множеств. Тогда у φ есть *сечение* $\psi\colon Y \to X$, т. е. отображение $\psi\colon Y \to X$, удовлетворяющее условию $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y$. Иначе говоря, ψ ставит каждому элементу Y в соответствие некий элемент из прообраза $\varphi^{-1}(y)$.

Аксиома выбора влечет ряд парадоксальных следствий. Например, из нее следует, что единичный шар в $\mathbb{R}^3$ можно разбить на 5 конгруэнтных (одинаковых) частей, а затем сложить из них два шара такого же размера (парадокс Банаха—Тарского). Аксиома выбора независима от остальных аксиом Цермело—Френкеля: ее нельзя ни доказать, ни опровергнуть в этой системе аксиом (это доказал Пол Коэн, используя *метод форсинга*). Если система Цермело—Френкеля непротиворечива, то она непротиворечива как в предположении, что аксиома выбора верна (это доказал Гёдель), так и в предположении, что аксиома выбора неверна (это доказал Коэн). Большинство альтернативных версий оснований математики (конструктивизм, интуиционизм, ультрафинитизм) не признает аксиому выбора и ее следствия. В большинстве разделов математики без аксиомы выбора можно обойтись, используя вместо нее какую-то ослабленную версию (см. разд. I.4.3), не влекущую парадоксов. Поэтому многие ученые стараются избежать аксиомы выбора и ее следствий или, по крайней мере, отмечают все случаи ее употребления.

Доказательство, использующее аксиому выбора, *неконструктивно*, т. е. использует математические объекты, которые невозможно задать явно. Многие математики полагают, что теорема существования верна, только если объект построен явно.

Аксиомы Цермело—Френкеля приводятся в этой главе для ознакомления. Для большинства разделов математики наивной теории множеств вполне достаточно, хотя необходимо помнить о возможности парадоксов и избегать их.

2.5. Терминология и библиография

По-английски отображение называется map, mapping, function, образ и прообраз — image, preimage. Отношение — relation, отношение эквивалентности — equivalence relation. Биекция, инъекция и сюръекция — bijection, injection, surjection (эти слова изобретены группой Бурбаки). Произведение множеств — Cartesian product (в честь Декарта, имя которого в латинских текстах писали Cartesius). Аксиома выбора называется Axiom of choice (сокращается до AC). Система Цермело—Френкеля (ZFC) подробно освещается в англоязычной Википедии.

Большая коллекция ссылок на страницы, посвященные аксиоме выбора, лежит тут: `http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/choice.html`.

Глава 3

КАРДИНАЛЫ И ТЕОРЕМА КАНТОРА

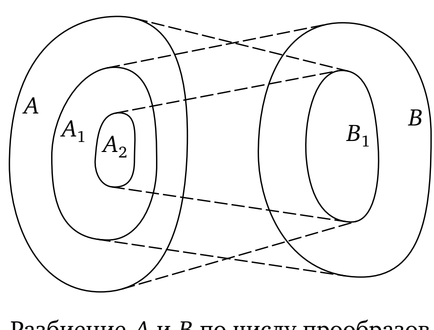
3.1. Теорема Кантора—Бернштейна—Шрёдера

Два множества A и B называются *равномощными*, если между A и B существует взаимно однозначное соответствие. *Счетное множество* есть множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Если множество A равномощно подмножеству множества B, то говорится, что *мощность A не больше мощности B*.

Теорема Кантора—Бернштейна—Шрёдера. Пусть A и B — такие множества, что A равномощно подмножеству множества B, а B равномощно подмножеству множества A. Тогда A и B равномощны.

Доказательство. Пусть $f: A \hookrightarrow B$ — вложение из A в B, $g: B \hookrightarrow A$ — вложение из B в A. Рассмотрим отображения $f \circ g: A \to A$ и $g \circ f: B \to B$. Обозначим через A_0 дополнение $A \setminus g(B)$, через B_0 — дополнение $B \setminus f(A)$ и через A_1 — множество $g(B_0)$. Определим индуктивно A_{i+2} по формуле $A_{i+2} = f \circ g(A_i)$. Определим A_∞ как пересечение образов отображений $(f \circ g)^i$ для всех i (через $(f \circ g)^i$ обозначается композиция $f \circ g$ с собой i раз). Легко видеть, что A разбивается в объединение непересекающихся подмножеств: $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_\infty$.



Разбиение A и B по числу прообразов

Применив аналогичную процедуру к B, получим разбиение B в объединение непересекающихся подмножеств: $B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_\infty$.

Легко видеть, что f задает биекцию из A_∞ в B_∞. Действительно, каждый элемент из A_∞ является образом элемента из B_∞, и наоборот. Также f задает биективное отображение из $A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cup \ldots$ в $B_1 \cup B_3 \cup B_5 \cup \ldots$, а g задает биективное отображение из $B_0 \cup B_2 \cup$ $\cup B_4 \cup \ldots$ в $A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \ldots$ (см. иллюстрацию).

Мы разбили A и B на непересекающиеся подмножества, которые попарно биективны. $\square$

Замечание 3.1. В математике значком $\square$ или похожим значком обозначается конец доказательства. Этот знак называется «халмош» или «tombstone». Его изобрел Пол Халмош, известный американский математик.

3.2. Мощность множества

Определение 3.2. Пусть на множестве S задано отношение $\succcurlyeq$. Это отношение называется *отношением частичного порядка*, если выполнены следующие аксиомы:

(i) *(рефлексивность)* $a \succcurlyeq a$ для любого a;
(ii) *(транзитивность)* если $a \succcurlyeq b$ и $b \succcurlyeq c$, то $a \succcurlyeq c$;
(iii) *(асимметричность)* если $a \succcurlyeq b$ и $b \succcurlyeq a$, то $a = b$.

Если в дополнение к этому для любых двух a, b имеем $a \succcurlyeq b$ либо $b \succcurlyeq a$, то $\succcurlyeq$ называется *отношением линейного порядка*.

В качестве примера «отношения частичного порядка» рассмотрим отношение «быть подмножеством» на множестве всех подмножеств множества X. Ясно, что $A_1 \subset A_2$ — отношение частичного порядка. Отношение линейного порядка имеется на множестве вещественных чисел («меньше либо равно»: $a \leqslant b$).

Определение 3.3. Если множество A допускает вложение в множество B, то говорится, что *мощность A меньше или равна мощности B*.

Легко видеть, что равномощность — это отношение эквивалентности. *Кардинал*, или *кардинальное число* множества A, — это его мощность. На языке наивной теории множеств отношение равномощности разбивает все множества на классы эквивалентности, пронумерованные *кардиналами*. Иначе говоря, кардинал множества X — это класс эквивалентности множеств, равномощных X.

С точки зрения аксиоматической теории множеств «класс эквивалентности множеств, равномощных X», множеством не является и говорить про него нельзя. Тем не менее, «множество кардиналов, меньших данного», определить можно. Это делается так. Возьмем множество X. Рассмотрим множество 2^X всех подмножеств X. Равномощность задает на 2^X отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности называется *множеством кардиналов, меньших или равных* X. В дальнейшем мы будем называть это множество «множеством кардиналов», предполагая, что X — чрезвычайно большое множество, мощность которого может быть при необходимости увеличена настолько, насколько нужно.

Задача 3.1. Выведите из теоремы Кантора—Бернштейна—Шрёдера, что «мощность A меньше или равна мощности B» — отношение частичного порядка на множестве кардиналов.

Замечание 3.4. Кардиналы конечных множеств называются *конечными кардиналами*. Легко видеть, что конечные кардиналы взаимно однозначно соответствуют натуральным числам.

Используя аксиому выбора, можно доказать, что всякое множество кардиналов на самом деле *линейно упорядочено*: для любых множеств X и Y либо X вкладывается в Y, либо Y вкладывается в X.

3.3. Счетные множества

Определение 3.5. Множество называется *счетным*, если оно допускает взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел.

Задача 3.2. Докажите, что следующие множества счетны:

а) множество $\mathbb{Z}$ целых чисел;

б) множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел;

в) множество $\mathbb{Z}[t]$ полиномов с целыми коэффициентами.

Естественные операции с конечными множествами (взятие произведения, взятие объединения непересекающихся множеств и так далее), как правило, увеличивают мощность множества. С бесконечными (например, счетными) множествами все совершенно иначе — естественные операции не меняют их мощности.

Задача 3.3. Пусть X — счетное множество Докажите, что $X \times X$ счетно.

Задача 3.4. Пусть X, Y — непересекающиеся счетные множества. Докажите, что $X \cup Y$ счетно.

Из аксиомы выбора легко вывести, что любое бесконечное множество содержит счетное множество (докажите это). Из такого множества можно выкинуть конечное подмножество, не меняя мощности.

Задача 3.5. Пусть X — бесконечное множество, которое содержит счетное подмножество. Рассмотрим конечное подмножество $Z \subset X$. Докажите, что дополнение $X \setminus Z$ равномощно X.

3.4. Диагональный метод Кантора

Если дано множество X, из него можно образовать много других множеств посредством естественных операций. Примеры: взятие декартова квадрата $X \to X \times X$, взятие двух копий множества $X \to X \times \{1, 2\}$, умножение на натуральные числа $X \to X \times \mathbb{N}$ и т. д. Можно доказать, что эти операции не меняют мощность множества, если оно бесконечно. Из известных нам операций над множествами операция «взятия множества подмножеств» $X \to 2^X$ стоит особняком: как доказал Кантор, она всегда увеличивает мощность множества.

Теорема Кантора. *Пусть X — непустое множество. Тогда X и 2^X неравномощны.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon X \to 2^X$ — биекция. Рассмотрим множество S всех $x \in X$, которые не содержатся в $\varphi(x)$. Пусть $\varphi(x_0) = S$. Зададимся вопросом: лежит ли x_0 в S? Если не лежит, то по определению S из того, что $x_0 \notin \varphi(x_0)$, следует, что $x_0 \in S$, — противоречие. Точно так же, если x_0 лежит в S, имеем $x_0 \in \varphi(x_0)$, откуда следует, что $x_0 \notin S$. Таким образом, биекция $\varphi\colon X \to 2^X$ невозможна. □

Континуум — это кардинальное число $2^{\mathbb{N}}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Множество, равномощное континууму, называется *континуальным*.

Согласно теореме Кантора мощность континуума строго больше мощности множества $\mathbb{N}$. Доказательство теоремы Кантора для случая $X = \mathbb{N}$ можно наглядно изложить следующим образом.

Пусть $S \subset \mathbb{N}$ — некоторое подмножество. Рассмотрим последовательность $\{x_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, где x_i равен 1, если $i \in S$, и 0, если $i \notin S$.

Это позволяет записывать элементы множества $2^{\mathbb{N}}$ как последовательности нулей и единиц. Ясно, что полученное соответствие между элементами $2^{\mathbb{N}}$ и последовательностями взаимно однозначно.

Предположим, что задано взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{N}$ и $2^{\mathbb{N}}$. Это значит, что есть последовательность последовательностей, в которой найдется любая последовательность:

$$\begin{array}{ccccc}
\lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \lambda_3^0 & \ldots \\
\lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \lambda_3^1 & \ldots \\
\lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots \\
\lambda_0^3 & \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \ldots
\end{array}$$

Диагональ этой диаграммы — это последовательность $\{\lambda_i^i\}$.

Рассмотрим последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$, полученную таким образом: если $\lambda_i^i = 1$, то $a_i = 0$, в противном случае $a_i = 1$. Такая последовательность отличается от каждой из последовательностей $\{\lambda_*^i\}$ в i-м члене, а значит, не совпадает ни с одной из последовательностей $\{\lambda_*^i\}$. Поэтому отображение $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$, сопоставляющее числу i последовательность $\{\lambda_*^i\}$, не может быть сюръективно.

Этот прием доказательства называется «диагональным методом Кантора»; он изобретен Кантором в 1891 г. Несчетность множества вещественных чисел Кантор доказал впервые в 1873 г., но совершенно другим способом.

Вещественное число от 0 до 1 можно записать в двоичной системе счисления, получив последовательность из нулей и единиц. Некоторые последовательности соответствуют одним и тем же числам, например 0,0011111111… и 0,01000000…

Задача 3.6. Докажите, что следующие множества равномощны континууму:

а) множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел;

б) множество последовательностей из чисел 0, 1, 2, 3;

в) множество последовательностей целых чисел;

г) множество функций $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Кантора—Бернштейна—Шрёдера.

Замечание 3.6. Из диагонального метода Кантора сразу следует, что множество S всех множеств не существует. Действительно, множество всех подмножеств множества S содержится в S. Значит, мощность S не больше, чем мощность множества 2^S, а такого не бывает. На языке аксиоматической теории множеств этот парадокс превращается в теорему — «множества всех множеств не существует».

3.5. Континуум-гипотеза

Последние годы жизни Кантор провел, пытаясь доказать *гипотезу континуума*, которая утверждает, что любое подмножество в $\mathbb{R}$ либо континуально, либо счетно. Обобщенная континуум-гипотеза утверждает, что для любого бесконечного множества X не существует множества Z, мощность которого меньше мощности множества 2^X и больше мощности множества X.

В 1940 г. Гёдель доказал, что гипотезу континуума (и обобщенную гипотезу континуума) невозможно опровергнуть, пользуясь аксиомами Цермело—Френкеля; иначе говоря, гипотеза континуума может быть опровергнута только в том случае, если эта система аксиом сама по себе противоречива. Идея Гёделя весьма проста: он определил «конструктивный универсум» — набор множеств, полученных из пустого множества естественными теоретико-множественными операциями, — и доказал, что в конструктивном универсуме выполняются аксиомы Цермело—Френкеля. Мощность множества, полученного конструктивно, довольно легко вычислить явно, и нетрудно проверить, что кардиналов, промежуточных между X и 2^X, не бывает.

В 1963 г. Пол Коэн доказал, что гипотезу континуума (и обобщенную гипотезу континуума) невозможно вывести из этих аксиом, то есть она *недоказуема*.

Есть математики, считающие, что теория множеств описывает «реально существующие объекты»; другие математики считают, что теория множеств состоит из формальных манипуляций, не имеющих основания в «реальном мире». Эти два взгляда часто называют «платоновским» и «формальным». Платон в книге «Государство» уподобил людей узникам, а материальный мир теням на стенах темного узилища-пещеры. Светом, с точки зрения Платона, является мудрость, доступная лишь избранным. Материальный мир — несовершенный отпечаток истинного мира символов, идей и знания.

Для формалиста вопрос о «верности континуум-гипотезы» после результатов Гёделя и Коэна не имеет смысла; для реалиста этот вопрос все еще осмысленный.

Гёдель был сторонником платоновской точки зрения на математику; он считал, что континуум-гипотеза неверна и невозможность опровергнуть ее иллюстрирует несовершенство системы аксиом Цермело—Френкеля.

3.6. Замечания

Теорема Кантора—Бернштейна—Шрёдера была получена Кантором с помощью аксиомы выбора и трансфинитной индукции. Доказательство, приведенное выше, принадлежит Эрнсту Шрёдеру, одному из основателей математической логики и изобретателю исчисления предикатов, и Феликсу Бернштейну, ученику Кантора. Поэтому эту теорему также называют теоремой Шрёдера—Бернштейна. Иногда ее называют теоремой Кантора—Бернштейна (доказательство Шрёдера содержало ошибку, исправленную Бернштейном в его диссертации).

Интересно, что Дедекинд доказал эту теорему в 1887 г., но его доказательство было впервые опубликовано только в 1932 г. в его собрании сочинений.

Счетные множества по-английски называются countable или denumerable, отношения частичного порядка — partial order relations.

Чтобы избежать парадоксов наивной теории множеств, нужно оперировать с множествами «мощности не больше заданной», т. е. с множествами, которые допускают вложение в заданное (очень большое) множество. Это множество часто называется *универсумом*. В 1920-х гг. Джон фон Нейман (John von Neumann) сформулировал систему аксиом теории множеств, основанную на понятии классов («очень больших множеств») и множеств («множеств небольшой мощности, которыми можно оперировать в соответствии с наивным представлением о множествах»). Эта система аксиом была упрощена и улучшена Паулем Бернайсом (Paul Bernays) в конце 1930-х гг. и Гёделем в 1940 г. Она эквивалентна системе аксиом Цермело—Френкеля.

Для большинства разделов современной математики основанием является не теория множеств, а теория категорий (о теории категорий см. лекцию 14 части III и дальше). Строгое построение теории категорий обычно осуществляется на основе аксиоматики фон Неймана—Бернайса—Гёделя (NBG).

Аксиоматика NBG и описание ее применений хорошо излагаются в англоязычной Википедии; там же можно прочитать биографию фон Неймана с подробным очерком его работ по логике.

Прекрасный учебник (а по совместительству и задачник) наивной теории множеств — первая часть книги Н. К. Верещагина и А. Шеня «Лекции по математической логике и теории алгоритмов», доступная на сайте МЦНМО: `http://www.mccme.ru/free-books/`.

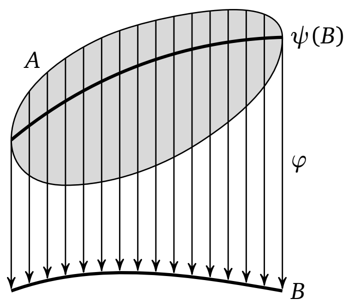
Доказательство Коэна недоказуемости континуум-гипотезы можно найти в книжке П. Дж. Коэна «Теория множеств и континуум-гипотеза».

Глава 4

АКСИОМА ВЫБОРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

4.1. Сечение отображения

Пусть $\varphi : A \to B$ — сюръективное отображение множеств. *Сечением* отображения φ называется такое отображение $\psi : B \to A$, что $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_B$.



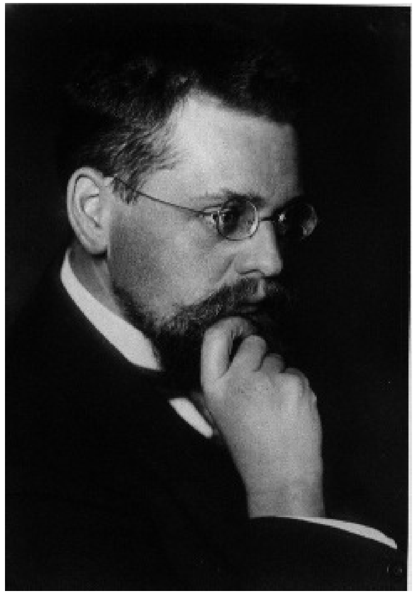
Сечение сюръективного отображения

Аксиома выбора утверждает, что каждое сюръективное отображение имеет сечение.

4.2. Аксиоматическая теория множеств

Как мы уже отмечали, к настоящему времени канонической стала система аксиом, предложенная в 1908 г. Эрнстом Цермело и улучшенная в 1922 г. Абрахамом Френкелем и (независимо от него) Торальфом Сколемом (Abraham Fraenkel, Thoralf Skolem). В учебниках встречается немало версий системы Цермело—Френкеля, но все они эквивалентны.

Цермело провел три года (1905—1908), пытаясь доказать, что его система аксиом не приводит к противоречию. Вплоть до 1930-х гг. Гильберт с коллегами были уверены, что в скором времени удастся доказать непротиворечивость системы аксиом Цермело—Френкеля и аксиоматическая теория множеств станет фундаментом для всей математики.



Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело
(Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871—1953)

В 1931 г. Курт Гёдель доказал, что непротиворечивость системы аксиом Цермело—Френкеля недоказуема. Если говорить точно, Гёдель доказал, что невозможно доказать непротиворечивость любой системы аксиом в математическом языке, достаточно сильном, чтобы сформулировать на нем утверждения арифметики, если из этой системы аксиом следуют аксиомы Пеано (существование натуральных чисел и принцип индукции). Еще точнее, Гёдель доказал невозможность доказательства средствами, допускающими формализацию в рамках того же самого математического языка.

Отмечу, что *опровергнуть* непротиворечивость такой системы аксиом как раз весьма просто — надо вывести из аксиом противоречие. Таким образом, к примеру, была опровергнута система аксиом Готлоба Фреге.

Многие математики убеждены в непротиворечивости системы аксиом Цермело—Френкеля; другие считают, что в случае противоречий будет изобретена новая система аксиом и осмысленную часть математических утверждений с легкостью переведут на новый язык (и так до бесконечности, по мере обнаружения противоречий). Именно этой точке зрения следовала группа Бурбаки.

Есть немало математиков, считающих, что аксиоматический метод порочен сам по себе. Эта точка зрения была выдвинута голландским математиком Брауэром (Luitzen Egbertus Jan Brouwer), знаменитым топологом, в 1908 г., в статье, провокативно озаглавленной «De onbetrouwbaarheid der logische principes» — «О сомнительности основ логики». Брауэр считал, что классическая (аристотелева) логика не может быть применима к бесконечным множествам и все математические исследования, которые основаны на таких применениях, неправильны. Особенно Брауэру не нравился принцип исключенного третьего, на котором основаны популярные доказательства «от противного». На протяжении 1920-х гг. Брауэр был редактором журнала «Mathematische Annalen», и он принципиально возвращал авторам все статьи, где использовались доказательства от противного.

Брауэр называл свою философию «интуиционизмом». В середине XX века русские математики, близкие к А. А. Маркову и А. Н. Колмогорову, развили свою версию философии интуиционизма под названием «конструктивизм»[1]; как и интуиционисты, конструктивные математики отрицают классическую математику, точнее — все неявные доказательства существования.

С точки зрения конструктивиста, любой математический объект должен быть задан явно. Например, действительное число в конструктивной математике — это алгоритм его вычисления с любой точностью плюс оценка скорости сходимости этого алгоритма.

Исследования по теории рекурсивных функций, вдохновленные конструктивизмом, оказались очень полезны в компьютерных науках, теории алгоритмов и лингвистике.

4.3. Аксиома выбора и ее конкуренты

Большой части математиков (даже не следующих экзотическим философиям) свойственно недоверие к неявным построениям. Действительно, гораздо удобнее иметь явный пример числа (к примеру, в виде ряда), чем теорему вида «существует такое число, что...».

1 Надо отметить, что лично Колмогоров не одобрял конструктивизма.

Тем не менее, доказательствами «от противного» и неявными построениями по необходимости пользуются почти все математики, потому что если от них отказаться, то придется отказываться от большого числа полезных утверждений, не имеющих явного доказательства.

Самым патологическим примером «неявной конструкции» является аксиома выбора, утверждающая существование объектов, которые заведомо не могут быть построены явно.

Ближе к концу 1920-х гг. оказалось, что аксиома выбора позволяет доказывать (наряду с верными и полезными) утверждения чрезвычайно сомнительные и противоречащие физической интуиции. Так, в 1924 г. Банах и Тарский обнаружили парадоксальное разложение шара в $\mathbb{R}^3$ в конечное количество частей, из которых можно сложить два таких же шара. Сейчас известно, что шар можно разложить в 5 частей и сложить из них два таких же шара, изометрически передвигая эти части в $\mathbb{R}^3$.

Это утверждение сродни мечте алхимиков получить из небольшого куска золота очень большой и вызывает столько же сомнений.

Впрочем, исключение аксиомы выбора не избавит математику от противоречий: непротиворечивость системы Цермело—Френкеля с аксиомой выбора[1] равносильна непротиворечивости Цермело—Френкеля без нее.

Тем не менее, хорошим тоном считается по возможности не пользоваться аксиомой выбора или пользоваться ею, всякий раз обозначая факт неявности выбора.

В математике (кроме очень экзотических областей) без аксиомы выбора довольно часто удается обойтись. Основные утверждения, для которых нужна аксиома выбора, следующие.

1. Теорема о существовании максимальных идеалов (см. лекцию 9).

2. Теорема о существовании базиса в любом бесконечномерном векторном пространстве («базиса Коши—Гамеля»).

3. Теорема Хана—Банаха о существовании замкнутой гиперплоскости, разделяющей два непересекающихся выпуклых замкнутых подмножества в топологическом векторном пространстве.

1 Эту систему аксиом часто обозначают ZF+AC, или ZFC.

4. Теорема Тихонова о компактности произведения бесконечного количества компактов.

Аксиома выбора влечет много утверждений, которые не нужны для доказательства полезных теорем и противоречат интуиции — наподобие парадокса Банаха—Тарского. Основная проблема, которая следует из принятия аксиомы выбора, — существование *неизмеримых множеств* — множеств, для которых не определена мера Лебега (*мерой Лебега* в математике называется «объем подмножества» в $\mathbb{R}^n$; неизмеримые подмножества — подмножества, для которых не определен объем). Множества, которые фигурируют в парадоксе Банаха—Тарского, очевидно, неизмеримы: иначе суммарный объем пяти частей, на которые разбит шар, не мог бы равняться удвоенному объему шара.

Существуют аксиомы теории множеств, которые противоречат аксиоме выбора; самая известная из них — аксиома детерминированности (axiom of determinacy), из которой среди прочего следует, что любое подмножество $\mathbb{R}^n$ измеримо.

Неизвестно, следует ли из непротиворечивости ZF+AC непротиворечивость системы Цермело—Френкеля с аксиомой детерминированности (ZF+AD). Другими словами, ZF+AD может оказаться противоречивой, даже если ZF+AC непротиворечива. Поэтому ZF+AD не нашла широкого употребления.

Другая причина, по которой аксиомы, отрицающие аксиому выбора, не нашли употребления, такая. Пусть X и Y — два множества. Из аксиомы выбора следует, что либо X равномощно подмножеству множества Y, либо Y равномощно подмножеству множества X. Оказывается, это утверждение *равносильно* аксиоме выбора. Поэтому из любой аксиомы, отрицающей аксиому выбора, следует существование таких множеств X и Y, что X не равномощно подмножеству Y, а Y не равномощно подмножеству X. Вместо изящной иерархии кардинальных чисел[1], построенной Кантором, мы получаем огромное количество множеств, которые никак не соизмеримы по мощности.

Вместо использования аксиомы выбора можно пользоваться ее слабой формой, которая называется *аксиомой зависимого выбора*

---

1 Из двух неравномощных множеств одно равномощно подмножеству другого, но не наоборот. Это задает отношение порядка на кардинальных числах, которое и называется *иерархией кардиналов*.

(dependent choice). Аксиома зависимого выбора утверждает следующее. Пусть даны множество X и такое подмножество $V \subset X \times X$, что $\pi_1(V) = X$, где π_1 — проекция на первый сомножитель. Тогда имеется такая бесконечная последовательность $\{x_i\}$, что $(x_i, x_{i+1}) \in \in V$ для любого i.

Система аксиом Цермело—Френкеля без аксиомы выбора, но с зависимым выбором (ZF+DC) достаточна для почти всех задач, где необходим выбор, но недостаточна для утверждений 1—4, перечисленных выше.

Любопытно, что непротиворечивость системы аксиом Цермело—Френкеля равносильна непротиворечивости системы аксиом, состоящей из ZF+DC плюс аксиомы «каждое подмножество $\mathbb{R}^n$ измеримо». Кроме того, DC следует из аксиомы детерминированности.

4.4. Вполне упорядоченные множества

Определение 4.1. Пусть X — множество, а $R \subset X \times X$ — бинарное отношение на множестве X, обозначенное $x_1 \prec x_2$. Это отношение называется *отношением частичного порядка* (partial order), если верны следующие утверждения:

транзитивность: если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$.
асимметричность: если $x \prec y$, то невозможно $y \prec x$.

Множество $(X, \prec)$ с отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным множеством*[1].

Определение 4.2. Пусть $(X, \prec)$ — частично упорядоченное множество. Если для каких-то $x, y \in X$ либо $x \prec y$, либо $y \prec x$, мы говорим, что x и y *сравнимы*. Отношение $\prec$ называется *отношением линейного порядка* (total order), если любые два различных элемента сравнимы. Множество $(X, \prec)$ с отношением линейного порядка называется *линейно упорядоченным множеством* или *цепью*.

Линейно упорядоченные множества также называются *монотонно упорядоченными*, или просто *упорядоченными*.

Если $x = y$ или $x \prec y$, то мы пишем $x \preccurlyeq y$.

1 Отметим, что это определение практически повторяет определение 3.2.

Определение 4.3. Пусть $(X, \prec)$ — линейно упорядоченное множество, а $Y \subset X$ — его подмножество. Элемент $y_0 \in Y$ называется *минимальным*, если $y_0 \preccurlyeq y$ для любого $y \in Y$. Линейно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным* (well-ordered set), если любое его подмножество имеет минимальный элемент. Отношение порядка на таком множестве называется *отношением полного порядка*.

Определение 4.4. *Начальным элементом* вполне упорядоченного множества называется его минимальный элемент. *Отрезком* линейно упорядоченного множества $(X, \prec)$ называется такое подмножество $Y \subset X$, что для любых $x, z \in Y$ и любого $y \in X$, удовлетворяющих условию $x \prec y \prec z$, имеем $y \in Y$. *Начальным отрезком* вполне упорядоченного множества называется отрезок, содержащий минимальный элемент. *Начальным элементом* отрезка называется его минимальный элемент.

Замечание 4.5. Пусть $X_0 \subset X$ — начальный отрезок вполне упорядоченного множества, x_0 — его начальный элемент, а x — минимальный элемент в $X \setminus X_0$ (мы предполагаем, что это множество непусто). Легко видеть, что X_0 — множество всех таких y, что $x_0 \preccurlyeq y \prec x$ (докажите это). Мы обозначаем такой отрезок $[x_0, x)$.

Вполне упорядоченные множества изобрел Георг Кантор, создатель теории множеств. Кантор базировал свою теорию множеств на понятии вполне упорядоченного множества и понятии ординала.

Определение 4.6. Два вполне упорядоченных множества называются *изоморфными*, если между ними есть биекция, сохраняющая порядок. Классы изоморфизма[1] вполне упорядоченных множеств называются *ординалами*, или *ординальными числами*.

Замечание 4.7. Ординалы можно складывать (для этого надо взять объединение $X \sqcup Y$ двух непересекающихся вполне упорядоченных множеств и положить $X \prec Y$). Это сложение некоммутативно, но ассоциативно. Кроме того, ординалы можно умножать. Полный порядок на произведении $X \times Y$ задается так:

$$(x, y) \prec (x', y') \text{ если } y \prec y' \text{ либо } y = y', x \prec x'.$$

Задача 4.1. Докажите, что эти определения задают вполне упорядоченные множества. Докажите ассоциативность умножения и

1 Классы изоморфизма суть классы эквивалентности по отношению «изоморфизм».

Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор
(Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845—1918)

сложения и дистрибутивность слева сложения относительно умножения. Приведите примеры, когда сложение и умножение ординалов не коммутативно и не дистрибутивно справа[1].

Теорема 4.8. *Пусть X, Y — вполне упорядоченные множества. Тогда X изоморфно начальному отрезку Y либо Y изоморфно начальному отрезку X. Более того, такой изоморфизм определен однозначно.*

Доказательство. Пусть Z — множество пар (X_1, Y_1) изоморфных начальных отрезков X и Y.

Шаг 1. Изоморфизм начальных отрезков (X_1, Y_1) определяется однозначно множеством X_1. В самом деле, пусть существуют два различных вложения $\varphi\colon X_1 \to Y$ и $\varphi'\colon X_1 \to Y$, задающие изоморфизм X_1 и начального отрезка Y. Обозначим через x минимальный элемент множества X_1, удовлетворяющий условию $\varphi(x) \neq \varphi'(x)$. Тогда $\varphi|_{[x_0,x)} = \varphi'|_{[x_0,x)}$. Поскольку φ и φ' — изоморфизмы, из этого следует, что $\varphi(x) = \varphi'(x)$.

Шаг 2. Мы получили, что Z упорядочено по включению, и это задает на Z полный порядок (докажите). Пусть x — минимальный элемент X, не принадлежащий X_1 для какого-то $(X_1, Y_1) \in Z$. Если такого элемента нет, это значит, что X изоморфен начальному отрез-

1 Дистрибутивность слева: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Дистрибутивность справа: $(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

ку Y. Если $Y_1 = Y$, мы все доказали. В противном случае начальный отрезок $[x_0, x)$ изоморфен начальному отрезку $[y_0, y)$, следовательно, отрезок $[x_0, x]$ изоморфен $[y_0, y]$. Мы пришли к противоречию. Это доказывает теорему 4.8. □

Теоремой Цермело называется следующее утверждение, доказанное Эрнстом Цермело в 1904 г.

Теорема 4.9 (теорема Цермело, «well-ordering theorem»). *Любое множество может быть вполне упорядочено.*

Теорема Цермело равносильна аксиоме выбора; мы докажем это немного позже.

4.5. Лемма Цорна и теорема Цермело

Другое утверждение, также равносильное аксиоме выбора, — лемма Цорна.

Пусть $(S, \prec)$ — частично упорядоченное множество. Элемент $x \in \in S$ называется *максимальным*, если не существует такого $y \in S$, что $x \prec y$. Для подмножества $S_1 \subset S$ и $x \in S$ мы пишем $S_1 \preccurlyeq x$, если для каждого $\xi \in S_1$ выполняется условие $\xi \preccurlyeq x$.

Теорема 4.10 (лемма Цорна). *Пусть $(S, \prec)$ — частично упорядоченное множество, причем для любого вполне упорядоченного подмножества*[1] *$S_1 \subset S$ найдется такой элемент $\xi \in S$, что $S_1 \preccurlyeq \xi$. Тогда в S найдется максимальный элемент.*

Теорема 4.11. *Следующие утверждения равносильны:*

ZL *лемма Цорна;*
WOT *теорема Цермело;*
AC *аксиома выбора.*

Доказательство. Отметим, что полностью аккуратное доказательство теоремы 4.11 требует использования аксиоматической теории множеств.

ZL ⇒ WOT. Пусть X — любое множество, а S — множество всех пар $(X_1, \prec)$, где $X_1 \subset X$ — подмножество, а $\prec$ — отношение полного порядка на X_1.

1 Довольно часто в утверждении леммы Цорна пишут «линейно упорядоченное подмножество» вместо вполне упорядоченного. Эти две формулировки равносильны. Доказательство равносильности предоставляется читателю в качестве нетрудного упражнения.

Рассмотрим отношение частичного порядка на S: $(X_1, \prec) < < (X_2, \prec)$, если $(X_1, \prec)$ — начальный отрезок для $(X_2, \prec)$. Легко видеть, что условие леммы Цорна выполнено для $(S, <)$: если $S_1 \subset \subset S$ вполне (и даже линейно) упорядочено, то объединение $\Xi \subset X$ всех элементов S_1 с естественным отношением порядка вполне упорядочено и удовлетворяет условию $S_1 \leqslant \Xi$. Поэтому в S есть максимальный элемент $(\Xi, \prec)$. Если $\Xi \neq X$, возьмем $\xi \in X \setminus \Xi$ и определим отношение порядка на $\Xi_1 := \Xi \cup \{\xi\}$, положив $\Xi \prec \xi$. Мы получим, что Ξ_1 — вполне упорядоченное множество, начальным отрезком которого является Ξ, а значит, Ξ не максимально. Мы пришли к противоречию; следовательно, $\Xi = X$. Поэтому X вполне упорядочено.

WOT $\Rightarrow$ AC. Пусть $\varphi: X \to Y$ — сюръекция, а X вполне упорядочено. Определим отображение $\psi: Y \to X$, взяв за $\psi(y)$ минимальный (в смысле полного порядка) элемент $\varphi^{-1}(y)$. Легко видеть, что это сечение.

AC $\Rightarrow$ ZL. *Шаг 1.* Пусть $(S, \prec)$ — частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям леммы Цорна и не содержащее максимального элемента. Тогда для каждого вполне упорядоченного подмножества $S_1 \subset S$ найдется $\xi \succcurlyeq S_1$. Поскольку элемент ξ не максимален, найдется такой $\xi_1 \in S$, что $\xi_1 \succ \xi$, а значит, $\xi \succ S_1$.

Шаг 2. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество вполне упорядоченных подмножеств S, а $\gamma: \mathfrak{S} \to S$ — отображение, переводящее $S_1 \subset S$ в элемент $\xi \in S$, удовлетворяющий условию $\xi \succ S_1$. Такое отображение существует в силу аксиомы выбора. Для доказательства этого рассмотрим множество всех пар

$$\mathfrak{R} := \{(S_1 \in \mathfrak{S}, \xi \in S) : \ \xi \succ S_1\}.$$

Естественная проекция $\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}$ сюръективна, что доказано на шаге 1. Сечение $\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}$ в композиции с проекцией $\mathfrak{R} \to S$ задаст искомое отображение γ.

Шаг 3. Пусть Θ — множество таких вполне упорядоченных подмножеств $P \subset S$, что для каждого $p \in P$ начальный отрезок $[p_0, p)$ удовлетворяет условию $p = \gamma([p_0, p))$. Когда $p = p_0$, это значит, что $p_0 = \gamma(\varnothing)$.

Множество Θ вполне упорядочено по вложению. В самом деле, возьмем $P, Q \in \Theta$, и пусть p — минимальный элемент P, для которого отрезок $[p_0, p)$ лежит в Q, а $[p_0, p]$ уже не лежит в Q. Поскольку

$p = \gamma([p_0, p))$, а $[p_0, p)$ лежит в Q, из того, что $p \notin Q$, следует, что $Q = [p_0, p)$.

Шаг 4. Мы получили, что объединение $P_\infty := \bigcup_{P \in \Theta} P$ лежит в Θ. Это невозможно, потому что объединение $P_\infty \cup \gamma(P_\infty)$ строго больше P_∞ и тоже лежит в Θ. Мы пришли к противоречию. Лемма Цорна доказана. $\square$

Часть II

ТОПОЛОГИЯ В ЗАДАЧАХ

Листок 1

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И НОРМА

В этом листочке предполагается знакомство с определением линейного пространства и скалярного произведения (т. е. положительно определенной билинейной симметричной формы), знакомство с понятиями кольца, поля и определением поля вещественных чисел [1].

1.1. Метрические пространства, выпуклые множества, норма

Определение 1.1. *Метрическое пространство* есть множество X, снабженное такой функцией $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, что

а) для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство $d(x, y) \geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$;

б) $d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность);

в) для любых $x, y, z \in X$ выполняется неравенство

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

(«неравенство треугольника»).

Функция d, удовлетворяющая этим условиям, называется *метрикой*. Число $d(x, y)$ называется *расстоянием между x и y*.

Если $x \in X$ — точка, а ε — положительное вещественное число, то множество

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X\colon\ d(x, y) < \varepsilon\}$$

называется *(открытым) шаром радиуса ε с центром в x*. Такой шар еще называется *ε-шаром*. Замкнутый шар определяется как

$$\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X\colon\ d(x, y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Задача 1.1. Рассмотрим любое подмножество в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с функцией d, заданной как $d(a, b) = |ab|$, где $|ab|$ — длина отрезка $[a, b]$ на плоскости. Докажите, что это метрическое пространство.

---

1 Материалу первого листка предшествует определение поля вещественных чисел. Поскольку это часть стандартного курса анализа (а часто и школьной математики), я отнес его в конец книги, в приложения.

Задача 1.2. Рассмотрим функцию $d_\infty\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$(x, y), (x', y') \to \max(|x-x'|, |y-y'|).$$

Докажите, что это метрика. Опишите единичный шар с центром в нуле.

Задача 1.3. Рассмотрим функцию $d_1\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$(x, y), (x', y') \to |x-x'|+|y-y'|.$$

Докажите, что это метрика. Опишите единичный шар с центром в нуле.

Задача 1.4*. Функция $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ называется *выпуклой вверх*, если $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ для любого вещественного $\lambda\in[0, 1]$. Пусть f — такая функция, а (X, d) — метрическое пространство. Предположим, что $f(\lambda)=0$ тогда и только тогда, когда $\lambda=0$. Докажите, что функция $d_f(x, y)=f(d(x, y))$ задает метрику на X.

Задача 1.5. Пусть V — линейное пространство с положительно определенной билинейной симметричной формой $g(x, y)$ (в дальнейшем мы будем называть такую форму *скалярным произведением*). Определим «расстояние» $d_g\colon V\times V\to\mathbb{R}$ как

$$d_g(x, y) = \sqrt{g(x-y, x-y)}.$$

Докажите, что $d(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$.

Определение 1.2. Пусть $x\in V$ — вектор векторного пространства. *Параллельный перенос на вектор* x — это отображение $P_x\colon V\to V$, $y\to y+x$.

Задача 1.6. Докажите, что функция d_g «инвариантна относительно параллельных переносов», т. е. $d_g(a, b)=d_g(P_x(a), P_x(b))$.

Задача 1.7. Докажите, что d_g удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\sqrt{g(x-y, x-y)} \leqslant \sqrt{g(x, x)}+\sqrt{g(y, y)}.$$

Указание. Рассмотрим подпространство $V_0\subset V$, порожденное x и y. Докажите, что оно либо одномерно, либо изоморфно, как пространство со скалярным произведением, пространству $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $g((x, y), (x', y'))=xx'+yy'$. Воспользуйтесь неравенством треугольника для $\mathbb{R}^2$.

Задача 1.8[!]**.** Докажите, что d_g — это метрика.

Указание. Пользуясь инвариантностью относительно параллельных переносов, сведите эту задачу к предыдущей.

Определение 1.3. Пусть V — пространство со скалярным произведением g, а d_g — метрика, построенная выше. Эта метрика называется *евклидовой.*

Определение 1.4. Пусть V — линейное пространство, $P_x\colon V \to V$ — параллельный перенос, а $V_1 \subset V$ — одномерное подпространство. Тогда образ $P_x(V_1)$ называется *прямой* в V.

Задача 1.9. Даны две разные точки $x, y \in V$. Докажите, что существует единственная прямая $V_{x,y}$, проходящая через x и y.

Определение 1.5. Пусть l — прямая, проведенная через точки x и y, и пусть a — точка, лежащая на l. Мы говорим, что a лежит *между* x, y, если $d(x, a) + d(a, y) = d(x, y)$. *Отрезок прямой между* x *и* y (обозначение: $[x, y]$) есть множество всех точек прямой $V_{x,y}$, которые лежат между x и y.

Задача 1.10. Даны три разные точки на прямой. Докажите, что одна (и только одна) из этих точек лежит между другими. Докажите, что отрезок $[x, y]$ — это множество всех точек z вида $ax + (1-a)y$, где $a \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Определение 1.6. Пусть V — линейное пространство, а $B \subset V$ — некоторое подмножество. Говорят, что подмножество *B выпуклое*, если для любых $x, y \in V$ оно содержит все точки отрезка $[x, y]$.

Определение 1.7. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$. *Нормой* на V называется такая функция $\rho\colon V \to \mathbb{R}$, что выполняются следующие свойства:

а) для любого $v \in V$ справедливо неравенство $\rho(v) \geqslant 0$ и, более того, $\rho(v) > 0$ для всех ненулевых v;

б) $\rho(\lambda v) = |\lambda|\rho(v)$;

в) для любых $v_1, v_2 \in V$ выполнено неравенство $\rho(v_1 + v_2) \leqslant \rho(v_1) + \rho(v_2)$.

Норму вектора часто обозначают $|x|$ или $\|x\|$.

Задача 1.11. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $\rho\colon V \to \mathbb{R}$ — норма на V. Рассмотрим функцию $d_\rho\colon V \times V \to \mathbb{R}$, заданную формулой $d_\rho(x, y) = \rho(x - y)$. Докажите, что это метрика на V.

Задача 1.12*. Пусть $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$ — метрика на V, инвариантная относительно параллельных переносов. Предположим, что d удовлетворяет условию

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Докажите, что d получается из нормы $\rho : V \to \mathbb{R}$ по формуле $d(x, y) = \rho(x - y)$.

Задача 1.13. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$, а $\rho : V \to \mathbb{R}$ — норма на V. Рассмотрим множество $B_1(0)$ всех точек с нормой не больше 1. Докажите, что это множество выпукло.

Определение 1.8. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, а v — ненулевой вектор. Тогда множество всех векторов вида $\{\lambda v : \lambda > 0\}$ называется *лучом в* V.

Определение 1.9. *Центральная симметрия* в V — это отображение $x \to -x$.

Задача 1.14*. Пусть центрально-симметричное выпуклое множество $B \subset V$ не содержит лучей и пересекается с каждым лучом $\{\lambda v : \lambda > 0\}$. Рассмотрим функцию

$$\rho :\ v \to \sup\{\lambda \in \mathbb{R}^{>0} :\ \lambda^{-1} v \notin B\}.$$

Докажите, что это норма на V. Докажите, что все нормы получаются таким образом.

Замечание 1.10. Эту функцию обыкновенно называют функционалом Минковского, построенным по телу.

Задача 1.15. Пусть G — абелева группа, а $\nu\colon G \to \mathbb{R}$ — функция, которая принимает неотрицательные значения, причем ее значения положительны для всех ненулевых $g \in G$. Предположим, что $\nu(a + b) \leqslant \nu(a) + \nu(b)$, $\nu(0) = 0$, а также что $\nu(g) = \nu(-g)$ для всех $g \in G$. Докажите, что функция $d_\nu\colon G \times G \to \mathbb{R}$, $d_\nu(x, y) = \nu(x - y)$ — это метрика на G.

Задача 1.16. Метрика d на абелевой группе G называется *трансляционно инвариантной*, если $d(x + g, y + g) = d(x, y)$ для всех $x, y, g \in G$. Докажите, что любая трансляционно инвариантная метрика d получена из некоторой функции $\nu\colon G \to \mathbb{R}$ по формуле $d(x, y) = \nu(x - y)$.

Определение 1.11. Зафиксируем простое число $p \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию $\nu_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, которая ставит числу $n = p^k r$ (r не делится на p) в соответствие число p^{-k}, а $\nu_p(0) = 0$. Эта функция называется *p-адическим нормированием на* $\mathbb{Z}$.

Задача 1.17. Докажите, что функция $d_p(m,n)=\nu_p(n-m)$ задает метрику на $\mathbb{Z}$. Эта метрика называется *p-адической метрикой на* $\mathbb{Z}$.

Указание. Проверьте соотношение $\nu_p(a+b)\leqslant \nu(a)+\nu(b)$ и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 1.12. Пусть R — кольцо, а $\nu\colon R\to\mathbb{R}$ — функция, которая принимает неотрицательные значения, причем ее значения положительны для всех ненулевых r. Предположим, что $\nu(r_1r_2)=$ $=\nu(r_1)\,\nu(r_2)$, а $\nu(r_1+r_2)\leqslant\nu(r_1)+\nu(r_2)$. Тогда ν называется *нормированием* кольца R. Кольцо, снабженное нормированием, называется *нормированным кольцом*.

Замечание. Как видно из вышеприведенных задач, нормирование на кольце R определяет инвариантную метрику на R. В дальнейшем любое нормированное кольцо будет рассматриваться как метрическое пространство.

Задача 1.18. Докажите, что ν_p — нормирование на кольце $\mathbb{Z}$. Определите нормирование на $\mathbb{Q}$, которое продолжает ν_p.

1.2. Полные метрические пространства

Определение 1.13. Пусть (X,d) — метрическое пространство, а $\{a_i\}$ — последовательность точек из X. Последовательность $\{a_i\}$ называется *последовательностью Коши*, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется ε-шар в X, содержащий все a_i, кроме конечного числа.

Задача 1.19. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — последовательности Коши в X. Докажите, что $\{d(a_i,b_i)\}$ — последовательность Коши в $\mathbb{R}$.

Определение 1.14. Пусть (X,d) — метрическое пространство, а $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — последовательности Коши в X. Последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ называются *эквивалентными*, если последовательность $a_0,b_0,a_1,b_1,\ldots$ — последовательность Коши.

Задача 1.20. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — последовательности Коши в X. Докажите, что $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{i\to\infty} d(a_i,b_i)=0$.

Задача 1.21. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — эквивалентные последовательности Коши в X, а $\{c_i\}$ — еще одна последовательность Коши. Докажите, что $\lim\limits_{i\to\infty} d(a_i,c_i)=\lim\limits_{i\to\infty} d(b_i,c_i)$.

Задача 1.22!. Пусть (X,d) — метрическое пространство, а $\overline{X}$ — множество классов эквивалентности последовательностей Коши.

Докажите, что функция

$$\{a_i\}, \{b_i\} \to \lim_{i\to\infty} d(a_i, b_i)$$

задает метрику на $\overline{X}$.

Определение 1.15. В такой ситуации $\overline{X}$ называется *пополнением пространства* X.

Задача 1.23. Рассмотрим естественное отображение $X \to \overline{X}$, $x \to \to \{x, x, x, x, \dots\}$. Докажите, что это вложение, которое сохраняет метрику.

Определение 1.16. Пусть A — подмножество в X. Элемент $c \in \in X$ называется *предельной точкой* подмножества A, если в любом открытом шаре, содержащем c, содержится бесконечное количество элементов множества A. Аналогично элемент $c \in X$ называется *предельной точкой* последовательности $\{a_n\}$, если для любого открытого шара, содержащего c, найдется бесконечно много таких номеров n, что a_n лежит в этом шаре.

Задача 1.24. Дана последовательность Коши. Докажите, что у нее не может быть больше одной предельной точки.

Определение 1.17. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность Коши. Мы говорим, что $\{a_i\}$ *сходится к* $x \in X$ или *имеет предел в* x (пишется $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = x$), если x — предельная точка последовательности $\{a_i\}$.

Определение 1.18. Метрическое пространство (X, d) называется *полным*, если любая последовательность Коши в X имеет предел.

Задача 1.25!. Докажите, что пополнение метрического пространства полно.

Определение 1.19. Подмножество $A \subset X$ метрического пространства называется *плотным*, если в каждом открытом шаре в X содержится элемент из A.

Задача 1.26. Докажите, что X плотно в $\overline{X}$.

Задача 1.27!. Пусть R — кольцо, снабженное нормированием ν. Постройте сложение и умножение на пополнении R относительно метрики, соответствующей нормированию. Докажите, что $\overline{R}$ снабжено нормированием, продолжающим нормирование на R.

Определение 1.20. Нормированное кольцо $\overline{R}$ называется *пополнением* R *относительно нормирования* ν.

Задача 1.28*. Пусть R — нормированное кольцо, а $\overline{R}$ — его пополнение. Предположим, что R — поле. Докажите, что $\overline{R}$ — тоже поле.

Задача 1.29. Докажите, что $\mathbb{R}$ получено пополнением $\mathbb{Q}$ относительно нормирования $q \to |q|$. Можно ли использовать этот результат в качестве еще одного определения $\mathbb{R}$?

Определение 1.21. Пополнение $\mathbb{Z}$ относительно нормирования ν_p называется *кольцом целых p-адических чисел*. Это кольцо обозначается $\mathbb{Z}_p$.

Задача 1.30. Пусть (X, d) — метрическое пространство, а $\{a_i\}$ — последовательность точек из X. Предположим, что ряд $\sum d(a_i, a_{i-1})$ сходится. Докажите, что $\{a_i\}$ — последовательность Коши. Верно ли обратное?

Задача 1.31[!]. Докажите, что для любой последовательности целых чисел $\{a_k\}$ ряд $\sum a_k p^k$ сходится в $\mathbb{Z}_p$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 1.32. Докажите, что $(1-p)\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} p^k\Big)=1$ в $\mathbb{Z}_p$.

Задача 1.33*. Докажите, что любое целое число, которое не делится на p, обратимо в $\mathbb{Z}_p$.

Определение 1.22. Пополнение $\mathbb{Q}$ относительно нормирования, полученного продолжением ν_p, обозначается $\mathbb{Q}_p$ и называется *полем p-адических чисел*.

Задача 1.34*. Пусть $x \in \mathbb{Q}_p$. Докажите, что $x = \dfrac{x'}{p^k}$, где $x' \in \mathbb{Z}_p$.

Задача 1.35*. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (здесь предел берется в $\mathbb{R}$ с обычной метрикой).

Определение 1.23. Нормирование ν кольца R называется *неархимедовым*, если $\nu(x+y) \leqslant \max(\nu(x), \nu(y))$ для всех x, y. В противном случае нормирование называется *архимедовым*.

Задача 1.36*. Пусть ν — нормирование в $\mathbb{Q}$. Докажите, что ν неархимедово тогда и только тогда, когда $\mathbb{Z}$ содержится в единичном шаре.

Указание. Воспользуйтесь пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Оцените значение $\sqrt[n]{\nu((x+y)^n)}$ для больших n, воспользовавшись оценкой на биномиальные коэффициенты: $\nu(C_n^k) \leqslant 1$.

Задача 1.37*. Пусть ν — неархимедово нормирование в $\mathbb{Z}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{m} \subset \mathbb{Z}$, состоящее из всех таких целых n, что $\nu(n) < 1$. Выведите из неархимедовости ν, что $\mathfrak{m}$ — это *идеал* в $\mathbb{Z}$ (идеал в кольце R есть подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения на элементы из R). Докажите, что идеал $\mathfrak{m}$

простой (простой идеал — это такой идеал, что $xy \notin \mathfrak{m}$ для всех $x, y \notin \mathfrak{m}$).

Задача 1.38*. Докажите, что любой идеал в $\mathbb{Z}$ имеет вид

$$\{0, \pm 1m, \pm 2m, \pm 3m, \ldots\}$$

для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что любой простой идеал $\mathfrak{m}$ в $\mathbb{Z}$ имеет вид $\{0, \pm 1p, \pm 2p, \pm 3p, \ldots\}$, где $p = 0, 1$ либо p простое.

Указание. Воспользуйтесь алгоритмом Евклида.

Задача 1.39*. Пусть ν — неархимедово нормирование на $\mathbb{Q}$, а

$$\mathfrak{m} = \{p, 2p, 3p, 4p, \ldots\}$$

— идеал, построенный в задаче 1.37. Докажите, что существует такое вещественное число $\lambda > 1$, что $\nu(n) = \lambda^{-k}$ для каждого $n = p^k r$, $r \not| p$.

Задача 1.40*. Пусть ν — такое нормирование на $\mathbb{Q}$, что $\nu(2) \leqslant 1$. Докажите, что $\nu(a) < \log_2(a) + 1$ для любого целого $a > 0$.

Указание. Воспользуйтесь представлением числа в двоичной системе счисления.

Задача 1.41*. Пусть ν — такое нормирование $\mathbb{Q}$, что $\nu(2) \leqslant 1$. Докажите, что $\nu(a) \leqslant 1$ для любого целого $a > 0$ (т. е. ν неархимедово).

Указание. Выведите из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$. Воспользовавшись предыдущей задачей, получите неравенство $\lim\limits_{N\to\infty} \nu(a^N) \leqslant 1$.

Задача 1.42*. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность Коши рациональных чисел вида $x/2^n$ («последовательность Коши» здесь понимается в обычном смысле, т. е. как в вещественных числах). Предположим, что нормирование ν на $\mathbb{Q}$ архимедово. Докажите, что $\{\nu(a_i)\}$ — последовательность Коши.

Указание. Записав x в двоичной системе счисления, докажите, что

$$\nu\left(\frac{x}{2^n}\right) \leqslant \frac{\nu(2)^{\log_2(x)+1}}{\nu(2)^n} \leqslant \nu(2)^{\log_2(x+1)-n}.$$

Задача 1.43*. Выведите из задачи 1.42, что любое архимедово нормирование ν продолжается до непрерывной функции на $\mathbb{R}$, которая удовлетворяет равенству $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$. Докажите, что ν получается как $x \to |x|^\lambda$ для какой-то константы $\lambda > 0$. Выразите λ через $\nu(2)$.

Задача 1.44*. Для каких $\lambda > 0$ функция $x \to |x|^{\lambda}$ задает нормирование на $\mathbb{Q}$?

Мы получили полную классификацию нормирований на $\mathbb{Q}$: любое нормирование получается как степень p-адического нормирования либо модуля. Эта классификация называется *теоремой Островского*.

Листок 2

ТОПОЛОГИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 2.1. Пусть M — метрическое пространство, $X \subset \subset M$ — подмножество. Подмножество X называется *открытым*, если оно вместе с каждой точкой содержит некоторый ε-шар с центром в этой точке, и *замкнутым*, если дополнение к X открыто.

Задача 2.1. Докажите, что X открыто тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $\{a_i\}$, которая сходится к $x \in X$, все a_i, кроме конечного числа, содержатся в X.

Задача 2.2. Докажите, что объединение любого количества открытых множеств открыто. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Задача 2.3. Докажите, что замкнутый шар

$$\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X\colon\ d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$$

всегда замкнут.

Задача 2.4. Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Определение 2.2. *Замыкание* множества $A \subset M$ есть объединение множества A и его всех предельных точек.

Задача 2.5. Дано метрическое пространство, а в нем открытый шар $B_\varepsilon(x)$ и замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$. Всегда ли $\overline{B}_\varepsilon(x)$ — замыкание множества $B_\varepsilon(x)$? Докажите, что замыкание любого подмножества всегда замкнуто.

Задача 2.6. Пусть A — подмножество в M, не имеющее предельных точек (такое подмножество называется *дискретным*). Докажите, что $M \setminus A$ открыто.

Определение 2.3. Пусть M — метрическое пространство, а $\varepsilon > > 0$ — число. Пусть $R \subset M$ таково, что M есть объединение всех ε-шаров с центрами в R. Тогда R называется *ε-сетью*.

Задача 2.7. Пусть каждая последовательность в M имеет предельную точку. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε-сеть.

Указание. Пусть такой сети нет; тогда для каждого конечного множества R найдется точка x, отстоящая от R больше чем на ε.

Присоединим x к R, воспользуемся индукцией и получим бесконечное дискретное подмножество в M.

Определение 2.4. Пусть $X \subset M$ — подмножество, а $U_i \subset M$ — набор открытых подмножеств. Говорят, что U_i — *покрытие подмножества* X, если $X \subset \bigcup U_i$. Если из $\{U_i\}$ выкинуть какое-то количество открытых множеств и оно останется покрытием, то полученное покрытие называется *подпокрытием*.

Задача 2.8. Пусть M — метрическое пространство, S — открытое покрытие M. Пусть каждая последовательность элементов пространства M имеет предельную точку. Докажите, что тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что любой шар радиуса меньше ε полностью содержится в одном из множеств покрытия S.

Указание. Пусть для каждого ε найдется такая точка x_ε, что соответствующий ε-шар не содержится целиком ни в одном из множеств покрытия. Возьмем сходящуюся к нулю последовательность $\{\varepsilon_i\}$, и пусть x — предельная точка последовательности $\{x_{\varepsilon_i}\}$. Докажите, что x не содержится ни в одном из множеств покрытия S.

Задача 2.9! (теорема Гейне—Бореля). Пусть $X \subset M$ — подмножество метрического пространства. Докажите, что следующие условия равносильны:

а) каждая последовательность точек из X имеет предельную точку в X;

б) каждое покрытие X открытыми множествами имеет конечное подпокрытие.

Указание. Чтобы вывести утверждение а) из б), воспользуйтесь задачей 2.6. Чтобы вывести б) из а), возьмем любое покрытие S, число ε из задачи 2.8 и конечную ε-сеть. Каждый из шаров ε-сети содержится в каком-то из элементов $U_i \in S$. Докажите, что $\{U_i\}$ — конечное подпокрытие.

Определение 2.5. Пусть M, M' — метрические пространства, а $f : M \to M'$ — функция. Функция f называется *непрерывной*, если для каждого $x \in M$ она переводит любую последовательность, сходящуюся к x, в последовательность, сходящуюся к $f(x)$.

Задача 2.10!. Пусть X — любое подмножество в M. Докажите, что функция $f : M \to \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{f} d(\{x\}, X)$, непрерывна, где $d(\{x\}, X)$ (расстояние от x до X) определяется как

$$d(\{x\}, X) := \inf_{x' \in X} d(x, x').$$

Определение 2.6. Пусть M — метрическое пространство, $X \subset \subset M$ — подмножество. Говорят, что подмножество X — *компакт*, или *компактное множество*, если выполнено любое из условий задачи 2.9. Заметим, что это условие не зависит от вложения $X \hookrightarrow M$, а зависит только от метрики на X.

Задача 2.11[!]. Рассмотрим пополнение $\mathbb{Z}$ относительно нормы ν_p, определенное выше (оно называется «кольцом целых p-адических чисел» и обозначается $\mathbb{Z}_p$). Докажите, что оно компактно.

Указание. Докажите, что любое p-адическое число можно представить в виде $\sum a_i p^i$, где a_i — целое число от 0 до $p-1$.

Задача 2.12. Докажите, что компактное подмножество в M всегда замкнуто.

Указание. Докажите, что оно содержит все свои предельные точки.

Задача 2.13. Докажите, что замкнутое подмножество компакта всегда компактно.

Задача 2.14. Докажите, что объединение конечного числа компактных подмножеств компактно.

Задача 2.15[!]. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на компакте. Докажите, что f достигает максимума.

2.1. Липшицевы функции

Определение 2.7. Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) — метрические пространства, а $C > 0$ — вещественное число. Отображение $f : M_1 \to M_2$ называется *C-липшицевым*, если для любых $x, y \in M_1$ выполняется неравенство

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant C d_1(x, y).$$

Функция $M \to \mathbb{R}$ на метрическом пространстве называется *C-липшицевой*, если соответствующее отображение C-липшицево относительно естественной метрики на M и $\mathbb{R}$.

Задача 2.16. Докажите, что расстояние $d_z(x) := d(z, x)$ до фиксированной точки $z \in M$ — 1-липшицева функция.

Задача 2.17. Докажите, что липшицевы функции непрерывны.

Определение 2.8. Пусть $f_i : M \to \mathbb{R}$ — последовательность таких функций, что $\lim_i f_i(x) = f(x)$ для какой-то функции f. В таком случае говорится, что f_i *поточечно сходится к f*.

Задача 2.18. Постройте последовательность f_i непрерывных функций на метрическом пространстве, поточечно сходящуюся к разрывной функции f.

Задача 2.19. Пусть f_i — последовательность C-липшицевых функций, поточечно сходящаяся к f. Докажите, что f непрерывна.

2.2. Расстояние между подмножествами метрических пространств

Определение 2.9. Пусть $X \subset M$ — подмножество метрического пространства, $y \in M$ — точка. Определим $d(y, X) := \inf\limits_{x \in X} d(x, y)$. Это число называется *расстоянием от y до X*.

Задача 2.20. Пусть $X \subset M$ — замкнутое подмножество, а $y \notin X$. Докажите, что $d(y, X) > 0$.

Задача 2.21. Пусть $X \subset M$, а X_1 — множество всех таких точек $y \in M$, что $d(y, X) = 0$. Докажите, что X_1 есть замыкание множества X.

Определение 2.10. Пусть $X, X' \subset M$ — подмножества метрического пространства. Определим $d(X, X') := \inf\limits_{x \in X} d(x, X')$. Это число называется *расстоянием от X до X'*.

Задача 2.22. Докажите, что $d(X, X') = d(X', X)$.

Задача 2.23. Докажите, что расстояние до множества задает 1-липшицеву функцию $M \to \mathbb{R}$.

Задача 2.24. Пусть $f \colon X \to \mathbb{R}^{>0}$ — непрерывная положительная функция на компакте. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $f > \varepsilon$ на X.

Задача 2.25!. Пусть $X, X' \subset M$ — непересекающиеся замкнутые подмножества в M, причем X компактно. Докажите, что $d(X, X') > 0$.

Указание. Докажите, что $d(x, X') \colon X \to \mathbb{R}$ задает непрерывную положительную функцию на X, и воспользуйтесь компактностью X, чтобы доказать, что ее минимум положителен.

Задача 2.26. Постройте два непересекающихся замкнутых подмножества $X, X' \subset M$ в метрическом пространстве, для которых $d(X, X') = 0$.

Задача 2.27. Пусть $X, X' \subset M$ — непересекающиеся компактные подмножества в метрическом пространстве M. Докажите, что у них есть непересекающиеся открытые окрестности.

Задача 2.28!. Пусть X, Y — два компактных подмножества метрического пространства. Докажите, что в X, Y есть такие точки x, y, что $d(x, y) = d(X, Y)$.

Определение 2.11. Подмножество $Z \subset M$ называется *ограниченным*, если оно содержится в шаре $B_r(x)$ для каких-то $r \in \mathbb{R}$, $x \in M$.

Задача 2.29. Пусть $Z \subset M$ компактно. Докажите, что оно ограниченно.

2.3. Расстояние Хаусдорфа

Определение 2.12. Пусть M — метрическое пространство, а $X \subset M$ — его подмножество. Объединение всех открытых ε-шаров с центрами во всех точках X называется *ε-окрестностью* X.

Определение 2.13. Пусть M — метрическое пространство, а X и Y — его ограниченные подмножества. *Расстояние Хаусдорфа* $d_H(X, Y)$ есть инфимум всех таких ε, что Y содержится в ε-окрестности X, а X содержится в ε-окрестности Y.

Задача 2.30!. Докажите, что расстояние Хаусдорфа задает метрику на множестве $\mathscr{M}$ всех замкнутых ограниченных подмножеств пространства M.

Задача 2.31. Пусть X, Y — ограниченные подмножества пространства M, а $x \in X$. Докажите, что всегда $d_H(X, Y) \geqslant d(x, Y)$.

Задача 2.32*. Пусть M — полное метрическое пространство. Докажите, что $\mathscr{M}$ тоже полно.

Указание. Рассмотрим последовательность Коши $\{X_i\}$ подмножеств пространства M. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех последовательностей Коши $\{x_i\}$ с $x_i \in X_i$. Пусть X — множество предельных точек последовательностей из $\mathfrak{S}$. Докажите, что $\{X_i\}$ сходится к X.

Задача 2.33*. Пусть $\{X_i\}$ — последовательность Коши компактных подмножеств в полном метрическом пространстве M, а X — ее предел. Докажите, что X компактно.

Указание. Перейдя к подпоследовательности в $\{X_i\}$, можно предположить, что $d_H(X_i, X_j) < 2^{-\min(i,j)}$. Пусть $\{x_i\}$ — последовательность точек из X. Для каждого X_j найдите такую последовательность $\{x_i(j) \in X_j\}$, что $d(x_i(j), x_i) = d(x_i, X_j)$. Поскольку X_j компактно, эта последовательность всегда имеет предельную точку. Выберем в $\{x_i(0)\}$ предельную точку $x(0)$ и заменим $\{x_i\}$ на такую ее подпоследовательность, что $\{x_i(0)\}$ сходится к $x(0)$. Потом заменим $\{x_i\}$, $i > 0$, на такую подпоследовательность, чтобы $\{x_i(1)\}$ сходилось к $x(1)$. На k-м шаге мы заменяем $\{x_i\}$, $i > k$, на подпоследовательность таким образом, чтобы $\{x_i(k)\}$ сходилось к $x(k)$. Докажите, что в результате получится такая последовательность $\{x_i\}$, что $\{x_i(k)\}$ сходится к $x(k)$ для всех k. Докажите, что эту операцию можно провести таким образом, что $d(x_i(k), x(k)) < < 2^{-i}$. Используя приведенную выше оценку $d_H(X_i, X_j) < 2^{-\min(i,j)}$, докажите, что $d(x_i(k), x_i) < 2^{-\min(k,j)+2}$. Выведите из этого, что $\{x_i\}$ — последовательность Коши.

Задача 2.34!. Пусть M компактно, $X \subset M$ — любое подмножество. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ в M найдется такое конечное множество R, что $d_H(R, X) < \varepsilon$. (Это утверждение можно выразить так: X допускает аппроксимацию конечными множествами с заданной наперед точностью.)

Указание. Найдите в X конечную ε-сеть.

Задача 2.35*. Пусть M компактно. Докажите, что $\mathscr{M}$ тоже компактно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

2.4. Локально компактные метрические пространства

Определение 2.14. Пусть M — метрическое пространство. Говорят, что M *локально компактно*, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Задача 2.36. Докажите, что любое компактное метрическое пространство локально компактно.

Задача 2.37. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией локально компактно.

Задача 2.38*. Приведите пример полного не локально компактного метрического пространства.

Задача 2.39. Пусть M — локально компактное метрическое пространство, $\overline{B}_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар, который компактен. Докажите, что $\overline{B}_\varepsilon(x)$ содержится в открытом множестве Z, замыкание которого компактно.

Указание. Покройте $\overline{B}_\varepsilon(x)$ шарами, замыкание которых компактно, и выберите конечное подпокрытие.

Задача 2.40!. В условиях предыдущей задачи докажите, что для какого-то $\varepsilon' > 0$ замыкание открытого шара $B_{\varepsilon+\varepsilon'}(x)$ компактно.

Указание. Возьмите такое Z, как в предыдущей задаче. Возьмите $\varepsilon' = d(M \setminus Z, \overline{B}_\varepsilon(x))$.

Определение 2.15. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Мы говорим, что M *удовлетворяет условию Хопфа—Ринова*, если для любых двух точек $x, y \in M$ и таких чисел $r_1, r_2 > 0$, что $r_1 + r_2 < < d(x, y)$, выполняется неравенство

$$d(B_{r_1}(x), B_{r_2}(y)) = d(x, y) - r_1 - r_2.$$

Задача 2.41*. Пусть M — полное локально компактное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа—Ринова, $x \in \in M$ — точка, а $\varepsilon > 0$ — такое число, что шар $\overline{B}_{\varepsilon'}(x)$ компактен для всех $\varepsilon' < \varepsilon$. Докажите, что шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Указание. Пусть $\varepsilon_i < \varepsilon$ — последовательность, которая сходится к ε. Пользуясь условием Хопфа—Ринова, докажите, что $\{\overline{B}_{\varepsilon_i}(x)\}$ — последовательность Коши в смысле метрики Хаусдорфа и она сходится к $\overline{B}_\varepsilon(x)$. Воспользуйтесь тем, что, как доказано выше, предел такой последовательности компактен.

Задача 2.42* (теорема Хопфа—Ринова, I)**.** Пусть M — полное локально компактное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа—Ринова. Докажите, что каждый замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ в M компактен.

Задача 2.43*. Придумайте пример полного локально компактного метрического пространства, в котором есть некомпактный замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$.

Замечание 2.16. Разумеется, такое пространство не может удовлетворять условию Хопфа—Ринова (задача 2.42).

Задача 2.44. Пусть M — такое метрическое пространство, что любой замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ в M компактен. Докажите, что M полно.

Задача 2.45*. Пусть M — локально компактное полное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа—Ринова, $x, y \in M$. Предположим, что все замкнутые шары в M компактны. Докажите, что тогда есть такая точка $z \in M$, что $d(x, z) = d(y, z) = = \frac{1}{2} d(x, y)$.

Задача 2.46*. Пусть S — множество всех рациональных чисел вида $n/2^k$, $n \in \mathbb{Z}$, на отрезке $[0, 1]$. В условиях предыдущей задачи докажите, что существует такое отображение $\xi : S \to M$, что $d(\xi(a), \xi(b)) = |a - b|\, d(x, y)$, причем $\xi(0) = x$, а $\xi(1) = y$.

Задача 2.47* (теорема Хопфа—Ринова, II). Пусть M — локально компактное полное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа—Ринова, $x, y \in M$. Докажите, что отображение ξ можно естественно продолжить на пополнение S относительно стандартной метрики, получив такое отображение $\overline{\xi}\colon [0, 1] \to M$, что $\overline{\xi}(0) = x$, $\overline{\xi}(1) = y$ и для всякой пары вещественных числа $a, b \in [0, 1]$ выполняется равенство $d((\overline{\xi}(a), \overline{\xi}(b)) = |a - b| d(x, y)$.

Замечание. Такое отображение называется *геодезическим*. Теорему Хопфа—Ринова можно сформулировать так: для любых двух точек в полном метрическом локально компактном пространстве, удовлетворяющем условию Хопфа—Ринова, найдется геодезическая, которая их соединяет.

Определение 2.17. Пространство, в котором любые две точки можно соединить геодезической, называется *геодезически связным*.

Задача 2.48*. Приведите пример метрического пространства, которое не локально компактно, но тем не менее геодезически связно.

Задача 2.49. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ — векторное пространство со стандартной (евклидовой) метрикой. Докажите, что геодезические в V — это отрезки (множества вида $ax + (1 - a)y$, где a пробегает отрезок $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, а $x, y \in V$).

Задача 2.50*. Пусть d — метрика на $\mathbb{R}^n$, ассоциированная с нормой $(x_1, x_2, \ldots) \to \max |x_i|$. Докажите, что она удовлетворяет условию Хопфа—Ринова. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с такой метрикой геодезически связно. Опишите геодезические.

Задача 2.51*. Пусть d — метрика на $\mathbb{R}^n$, ассоциированная с нормой $(x_1, x_2, \ldots) \to \sum |x_i|$. Докажите, что она удовлетворяет условию Хопфа—Ринова. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с такой метрикой геодезически связно. Опишите геодезические.

Задача 2.52*. Верно ли, что метрика d, определенная нормой, всегда удовлетворяет условию Хопфа—Ринова?

Определение 2.18. Пусть X — метрическое пространство, а k, $0 < k < 1$, — вещественное число. Отображение $f\colon X \to X$ называется *сжимающим с коэффициентом* k, если $kd(x, y) \geqslant d(f(x), f(y))$.

Задача 2.53!. Пусть X — метрическое пространство, а $f\colon X \to X$ — сжимающее отображение. Докажите, что для каждого $x \in X$ последовательность $\{a_i\}$, $a_0 := x$, $a_1 := f(x)$, $a_2 := f(f(x))$, $a_3 := f(f(f(x)))$, … — последовательность Коши.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $d(a_i, a_{i+1}) \leqslant k^i d(x, f(x))$, и выведите из этого сходимость ряда $\sum d(a_i, a_{i+1})$.

Задача 2.54[!] (теорема о сжимающих отображениях)**.** Пусть X — полное метрическое пространство, а $f\colon X \to X$ — сжимающее отображение. Докажите, что f имеет неподвижную точку.

Указание. Возьмите предел последовательности

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ f(f(f(x))),\ \ldots$$

Листок 3

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ ТОПОЛОГИЯ

Определение 3.1. Пусть дано пространство M и выделен набор подмножеств $S \subset M$, называемых *открытыми подмножествами*. Пара (M, S) (а также само M) называется *топологическим пространством*, если выполнены следующие условия:

1) пустое множество и само M открыты;

2) объединение любого числа открытых подмножеств открыто;

3) пересечение конечного числа открытых подмножеств открыто.

Отображение $\varphi\colon M \to M'$ топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества открыт. Непрерывные отображения также называются *морфизмами* топологических пространств. *Изоморфизм* топологических пространств — это такой морфизм $\varphi\colon M \to M'$, что существует морфизм $\psi\colon M' \to M$, обратный к φ (т. е. $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ — тождественные морфизмы). Изоморфизм топологических пространств традиционно называется *гомеоморфизмом*.

Подмножество $Z \subset M$ называется *замкнутым*, если его дополнение открыто. *Окрестность* точки $x \in M$ — это любое открытое подмножество в M, которое ее содержит. *Окрестность* подмножества $Z \subset M$ — это любое открытое подмножество в M, которое его содержит.

Задача 3.1. Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

Задача 3.2$^!$. Пусть M — некоторое множество, а S — множество всех его подмножеств. Докажите, что S задает на M топологию. Эта топология называется *дискретной*. Опишите множество всех непрерывных отображений из M в заданное топологическое пространство.

Задача 3.3$^!$. Пусть M — некоторое множество, а S — множество из двух его подмножеств: пустого множества и самого M. Докажите, что S задает на M топологию. Эта топология называется *кодискретной*. Опишите множество всех непрерывных отображений из произвольного пространства в пространство с кодискретной топологией.

Задача 3.4. Постройте непрерывную биекцию топологических пространств, которая не является гомеоморфизмом.

Задача 3.5. Дано подмножество Z топологического пространства M. Открытые подмножества в Z задаются пересечениями вида $Z \cap U$, где U открыто в Z. Докажите, что это задает топологию на Z. Докажите, что естественное вложение $Z \hookrightarrow M$ непрерывно.

Определение 3.2. Такая топология на $Z \subset M$ называется *индуцированной с* M. Подмножество любого топологического пространства мы будем рассматривать как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Определение 3.3. Пусть M — топологическое пространство, а S_0 — такой набор открытых множеств, что любое открытое множество можно получить как объединение множеств из S_0. Тогда S_0 называется *базой топологии на* M.

Задача 3.6. Опишите все базы для M с дискретной топологией; для M с кодискретной топологией.

Определение 3.4. Пусть M — метрическое пространство. Напомним, что подмножество $U \subset M$ называется *открытым*, если для каждой точки $u \in U$ оно содержит шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в u.

Задача 3.7. Докажите, что это определение задает топологию на метрическом пространстве.

Определение 3.5. Топологическое пространство называется *метризуемым*, если его можно получить из метрического пространства вышеописанным способом.

Задача 3.8. Докажите, что дискретное топологическое пространство метризуемо, а кодискретное — нет (если в нем больше одной точки).

Задача 3.9. Докажите, что открытые шары в метрическом пространстве M открыты. Докажите, что открытые шары задают базу топологии на M.

Задача 3.10[!]. Пусть M — топологическое пространство, а S, S' — две топологии на M. Предположим, что для каждой точки $m \in M$ и окрестности $U' \ni m$, открытой в топологии S', найдется окрестность $U \ni m$, $U \subset U'$, открытая в топологии S. Докажите, что тождественное отображение $i\colon (M, S) \to (M, S')$ непрерывно. Приведите пример, когда i не является гомеоморфизмом.

Замечание. В такой ситуации иногда говорят, что топология, заданная S', *сильнее* топологии, заданной S.

Задача 3.11. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой ν, как в листке 1. Эта норма задает метрику, а следовательно, и топологию на $\mathbb{R}^n$. Обозначим эту топологию через S_ν. Предположим, что ν, ν' — две такие нормы, что для какой-то фиксированной константы $C \in \mathbb{R}$ всегда выполняются неравенства $C^{-1}\nu'(x) < \nu(x) < C\nu'(x)$. Докажите, что тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя задает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n, S_\nu) \to (\mathbb{R}^n, S_{\nu'})$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.12*. Предположим, что ν, ν' — две такие нормы на $\mathbb{R}^n$, что тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя задает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n, S_\nu) \to (\mathbb{R}^n, S_{\nu'})$. Докажите, что найдется такая константа C, что $C^{-1}\nu'(x) < \nu(x) < C\nu'(x)$.

Задача 3.13*. Пусть V — конечномерное векторное пространство, наделенное положительно определенной билинейной формой g. Рассмотрим V как метрическое пространство с метрикой d_g, построенной в листке 1. Обозначим соответствующую топологию через S_g. Докажите, что топология на V не зависит от выбора g, т. е. что для любых g, g' тождественное отображение из V в себя задает гомеоморфизм $(V, S_g) \to (V, S_{g'})$.

Задача 3.14.** Пусть V — конечномерное пространство с нормой ν. Докажите, что топология S_ν не зависит от выбора нормы ν: тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя всегда задает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n, S_\nu) \to (\mathbb{R}^n, S_{\nu'})$. Верно ли это, когда V бесконечномерно?

Определение 3.6. Рассмотрим метрику d на $\mathbb{R}^n$, заданную нормой

$$|(\alpha_1, \ldots \alpha_n)| = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}.$$

Топология на $\mathbb{R}^n$, связанная с d, называется *естественной*. *Естественная топология* на подмножествах в $\mathbb{R}^n$ — это топология, индуцированная с $\mathbb{R}^n$.

Задача 3.15. Рассмотрим $\mathbb{R}$ с естественной топологией. Пусть M — пространство с дискретной топологией, M' — пространство с кодискретной топологией. Найдите множество всех непрерывных отображений

а) из $\mathbb{R}$ в M; б) из M в $\mathbb{R}$;

в) из M' в $\mathbb{R}$; г) из $\mathbb{R}$ в M'.

Задача 3.16. Пусть $\varphi\colon M \to M'$ — некоторое отображение топологических пространств. Верно ли, что если φ непрерывно, то прообраз любого замкнутого множества замкнут? Верно ли, что если прообраз любого замкнутого множества замкнут, то отображение непрерывно?

Задача 3.17. Приведите пример такого непрерывного отображения топологических пространств, что образ открытого множества не открыт. Приведите пример такого непрерывного отображения топологических пространств, что образ замкнутого множества не замкнут.

Определение 3.7. Пусть M — топологическое пространство, $Z \subset \subset M$ — произвольное подмножество, $\overline{Z}$ — пересечение всех замкнутых подмножеств M, содержащих Z. Тогда $\overline{Z}$ называется *замыканием* Z.

Задача 3.18. Докажите, что $\overline{Z}$ замкнуто.

Определение 3.8. Пусть M — топологическое пространство. Следующие условия T0—T4 называются *условиями отделимости*.

T0. Пусть даны любые две несовпадающие точки $x, y \in M$, тогда по крайней мере у одной из них есть окрестность, которая не содержит другую.

T1. Любая точка пространства M замкнута.

T2. Любые две различные точки $x, y \in M$ обладают окрестностями U_x, U_y, которые не пересекаются.

T3. В M верно T1. Кроме того, для любой точки $y \in M$ любая окрестность $U \ni y$ содержит открытую окрестность $U' \ni y$, замыкание которой содержится в U.

T4. В M верно T1. Кроме того, для любого замкнутого подмножества $Z \subset M$ любая окрестность $U \supset Z$ содержит открытую окрестность $U' \supset Z$, замыкание которой содержится в U.

Условие T2 известно как *аксиома Хаусдорфа*. Топологическое пространство, удовлетворяющее условию T2, называется *хаусдорфовым*.

Задача 3.19. Докажите, что условие T1 эквивалентно следующему: для любых двух несовпадающих точек $x, y \in M$ найдется окрестность точки y, не содержащая x.

Задача 3.20. Докажите, что условие T4 эквивалентно следующему: у любых двух непересекающихся замкнутых множеств $X, Y \subset M$ найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 3.21. Пусть M — топологическое пространство. Определим на M отношение эквивалентности следующим образом: x эквивалентно y тогда и только тогда, когда $x \in \overline{\{y\}}$ и $y \in \overline{\{x\}}$. Обозначим множество классов эквивалентности через M'.

а) Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности. Докажите, что M удовлетворяет условию T0 тогда и только тогда, когда $M = M'$.

б) Скажем, что подмножество $U \subset M'$ открыто тогда и только тогда, когда открыт его прообраз при отображении $M \to M'$. Докажите, что это задает топологию на M'. Удовлетворяет ли она условию T0?

в) Докажите, что открытые подмножества в M — это в точности прообразы открытых подмножеств в M'.

г) Пусть топология на M кодискретная. Чему равно M'?

Задача 3.22. Выполняются ли условия T0—T4 в пространстве с дискретной топологией? С кодискретной?

Задача 3.23. Докажите, что условия T0—T4 выполняются в $\mathbb{R}$.

Задача 3.24. Докажите, что условие T0 следует из T1, а T1 следует из T2.

Задача 3.25. Приведите пример пространства, не удовлетворяющего условию T1. Приведите пример нехаусдорфова пространства, где все точки замкнуты.

Задача 3.26*. Приведите пример пространства, удовлетворяющего T1, в котором любые два непустых открытых множества пересекаются.

Задача 3.27*. Докажите, что из T3 следует T2.

Задача 3.28*. Приведите пример пространства, где выполняется T3, но не выполняется T4.

Задача 3.29. Дано метризуемое топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнены условия T1, T2, T3.

Задача 3.30*. Дано метризуемое топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнено условие T4.

Задача 3.31*. Пусть множество M конечно.

а) Найдите все топологии на M, удовлетворяющие условию T1.

б) Бывают ли на M топологии, которые не удовлетворяют T1, но удовлетворяют T0?

в)** Пусть M состоит из n точек. Сколько разных топологий на пространстве M? Сколько из них удовлетворяют условию T0?

Определение 3.9. Множество M называется *частично упорядоченным* (по-английски: «poset», «partially ordered set»), если на нем задано отношение $x \leqslant y$ («x меньше либо равно y») с такими свойствами:

1) если $x \leqslant y$, а $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;

2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Задача 3.32*. а) Пусть M — частично упорядоченное множество; будем говорить, что подмножество $S \subset M$ открыто, если вместе с любым элементом $x \in S$ оно содержит все $y \in M$, для которых $y \leqslant x$. Докажите, что это задает топологию на M. Когда эта топология удовлетворяет условию T0? А условию T1?

б) Пусть M — конечное множество, и пусть на нем задана топология, удовлеворяющая условию T0. Докажите, что она происходит из какого-то частичного порядка на M.

Определение 3.10. Пусть $Z \subset M$ — подмножество в топологическом пространстве. Подмножество Z называется *плотным*, если Z пересекается с каждым непустым открытым подмножеством M.

Задача 3.33!. Докажите, что Z плотно тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{Z}$ есть все M.

Задача 3.34. Найдите все плотные подмножества в пространстве с дискретной топологией; с кодискретной топологией.

Задача 3.35. Докажите, что $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Определение 3.11. Подмножество Z в топологическом пространстве M называется *нигде не плотным*, если для любого открытого подмножества $U \subset M$ подмножество $Z \cap U$ не плотно в U.

Задача 3.36. Докажите, что замыкание нигде не плотного подмножества нигде не плотно.

Задача 3.37!. Докажите, что Z нигде не плотно тогда и только тогда, когда $M \setminus \overline{Z}$ плотно в M.

Задача 3.38*. Постройте континуальное нигде не плотное подмножество в отрезке $[0, 1]$ с естественной топологией.

Задача 3.39. Найдите все нигде не плотные подмножества в пространстве с дискретной топологией; в пространстве с кодискретной топологией.

Определение 3.12. Пусть M — топологическое пространство, $x \in M$ — произвольная точка. База окрестностей точки x — это такой набор B окрестностей точки x, что любая окрестность $U \ni x$ содержит какую-то окрестность из B.

Задача 3.40. Пусть в топологическом пространстве M задан такой набор открытых подмножеств B, что для любой точки $x \in M$ совокупность всех $U \in B$, содержащих x, образует базу окрестностей x. Докажите, что B — база топологии пространства M.

Определение 3.13. Пусть M — топологическое пространство. На M можно наложить два условия счетности. Если у каждой точки M найдется счетная база окрестностей, то говорят, что в M *выполняется первая аксиома счетности*. Если у M найдется счетная база открытых множеств, то говорят, что для M выполняется *вторая аксиома счетности* либо что M — *пространство со счетной базой*. Если в M найдется плотное счетное множество, то говорят, что M *сепарабельно*.

Задача 3.41. Дано пространство M с дискретной топологией. Докажите, что в M выполняется первая аксиома счетности.

Задача 3.42. Пусть топологическое пространство M имеет счетную базу. Докажите, что оно сепарабельно.

Задача 3.43*. Пусть метризуемое топологическое пространство M сепарабельно. Докажите, что M имеет счетную базу.

Задача 3.44[!]. Дано метризуемое топологическое пространство. Докажите, что оно имеет счетную базу окрестностей в каждой точке.

Задача 3.45. Постройте несепарабельное метризуемое топологическое пространство.

Задача 3.46.** Приведите пример счетного хаусдорфова пространства без счетной базы.

3.1. Топология и сходимость

Топологические пространства были изобретены как язык, на котором удобно говорить о непрерывных функциях. В листке 2 мы определили непрерывную функцию как функцию, сохраняющую пределы сходящихся последовательностей. К топологии можно подходить с аксиоматической точки зрения, приведенной выше, либо с точки зрения геометрической интуиции, определяя топологию на пространстве посредством задания класса сходящихся последовательностей, а непрерывные отображения — как отображения, сохраняющие пределы.

Второй подход к топологии (при всех его преимуществах) наталкивается на теоретико-множественные трудности — если в нашем пространстве нет счетной базы, приходится пользоваться вполне упорядоченными несчетными последовательностями. В дальнейшем мы будем работать в основном в пространствах со счетной базой окрестностей точки, и в такой ситуации удобно определять топологию и непрерывность через пределы последовательностей.

Определение 3.14. Пусть M — топологическое пространство, $Z \subset M$ — бесконечное подмножество. Точка $x \in M$ называется *предельной точкой* для Z, если в каждой окрестности точки x содержится $z \in Z$. *Пределом* последовательности $\{x_i\}$ называется такая точка x, что в любой ее окрестности содержатся почти все x_i. Последовательность называется *сходящейся*, если у нее есть предел.

Задача 3.47. Найдите все сходящиеся последовательности в пространстве с дискретной топологией; в пространстве с кодискретной топологией.

Задача 3.48. Пусть M — хаусдорфово пространство. Докажите, что у любой последовательности есть не более одного предела.

Задача 3.49*. Верно ли обратное (т. е. вытекает ли хаусдорфовость из единственности предела)? А если в M есть счетная база окрестностей точки?

Задача 3.50. Пусть в M предел любой последовательности единствен. Докажите, что в M выполнено условие отделимости T1.

Задача 3.51. Пусть заданы непрерывное отображение $f: M \to M'$ и некоторое подмножество $Z \subset M$. Докажите, что f переводит предельные точки множества Z в предельные точки множества $f(Z)$. Докажите, что f переводит пределы в пределы.

Задача 3.52!. Пусть отображение переводит предельные точки любого множества в предельные точки его образа. Докажите, что оно непрерывно.

Задача 3.53. Пусть дано пространство M со счетной базой окрестностей у каждой точки. Рассмотрим произвольное подмножество $Z \subset M$. Докажите, что замыкание Z есть множество пределов всех последовательностей из Z.

Задача 3.54!. Пусть даны пространства M, M' со счетной базой окрестностей у каждой точки и отображение $f: M \to M'$, сохраняющее пределы последовательностей. Докажите, что f непрерывно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.55*. А что если в предыдущей задаче не требовать счетной базы окрестностей точки для M? А для M'?

Листок 4

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ

4.1. База топологии

Определение 4.1. Пусть даны топологическое пространство M и набор B из открытых подмножеств в M. Набор B называется *предбазой* для топологии на M, если любое открытое множество можно получить (возможно, бесконечным) объединением конечных пересечений открытых подмножеств, принадлежащих B, и *базой*, если любое открытое множество можно получить как объединение подмножеств, лежащих в B. У топологии на M есть *счетная база*, если есть база топологии, состоящая из счетного набора подмножеств.

Задача 4.1. Рассмотрим $\mathbb{R}$ с дискретной топологией. Докажите, что в нем нет счетной предбазы.

Задача 4.2[!]**.** Пусть задано топологическое пространство M со счетной предбазой. Докажите, что у M есть счетная база.

Задача 4.3*. Дано конечное множество M, $|M| = 2^n$, с дискретной топологией, а B — предбаза в M. Докажите, что $|B| \geqslant n$. Найдите предбазу, в которой $2n$ элементов.

Задача 4.4. Рассмотрим $\mathbb{R}$ с естественной топологией, и пусть B — множество всех интервалов, у которых концы — конечные двоичные дроби. Докажите, что это база в топологии $\mathbb{R}$.

Задача 4.5. Пусть дан такой набор подмножеств B в множестве M, что $\bigcup B = M$. Рассмотрим все подмножества, которые можно получить из элементов набора B, а также M и $\varnothing$ конечными пересечениями и произвольными объединениями. Докажите, что получится топология на M.

Определение 4.2. Такая топология называется *топологией, заданной предбазой B*.

Определение 4.3. Пусть M_1, M_2 — топологические пространства. Рассмотрим топологию S на $M_1 \times M_2$, заданную предбазой из подмножеств вида $U_1 \times M_2$, $M_1 \times U_2$, где U_1, U_2 открыты в M_1, M_2. Тогда $(M_1 \times M_2, S)$ называется *произведением M_1 и M_2*.

Задача 4.6. Докажите, что естественная проекция $M_1 \times M_2 \to M_1$ непрерывна. Докажите, что множества вида $U_1 \times U_2$ задают базу в топологии на $M_1 \times M_2$.

Задача 4.7. Даны отображения топологических пространств $\gamma_1\colon X \to M_1$, $\gamma_2\colon X \to M_2$. Докажите, что они непрерывны тогда и только тогда, когда произведение $\gamma_1 \times \gamma_2\colon X \to M_1 \times M_2$ непрерывно.

Задача 4.8. Пусть M_1, M_2 удовлетворяют условию из списка, приведенного ниже. Докажите, что $M_1 \times M_2$ удовлетворяет тому же условию:

а) свойство отделимости T1;

б$^!$) условие Хаусдорфа (T2);

в) свойство отделимости T3;

г) сепарабельность;

д$^!$) наличие счетной базы окрестностей у каждой точки;

е) наличие счетной базы.

Задача 4.9.** Верно ли это для аксиомы отделимости T4?

Определение 4.4. Отображение $\Delta\colon x \to (x, x) \in X \times X$ называется *диагональным вложением*, а его образ — *диагональю* в $X \times X$.

Задача 4.10. Докажите, что диагональное вложение является гомеоморфизмом на свой образ (топология на $\Delta \subset X \times X$ предполагается индуцированной с $X \times X$).

Указание. Воспользуйтесь задачей 4.7.

Задача 4.11. Докажите, что X удовлетворяет условию T1 тогда и только тогда, когда диагональ является пересечением всех открытых множеств, ее содержащих.

Задача 4.12$^!$. Докажите, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ замкнута в $X \times X$.

Задача 4.13. Докажите, что топология на X дискретна тогда и только тогда, когда диагональ открыта в $X \times X$.

Задача 4.14. Пусть график $\Gamma \subset X \times Y$ отображения топологических пространств $\gamma\colon X \to Y$ замкнут. Верно ли, что γ непрерывно?

Задача 4.15$^!$. Пусть $\gamma\colon X \to Y$ — морфизм топологических пространств, причем Y хаусдорфово. Докажите, что график γ замкнут.

Задача 4.16. Пусть M_1, M_2 — метрические пространства, $M = M_1 \times M_2$ — их произведение, а d — одна из перечисленных ниже функций на $M \times M$. Докажите, что d задает метрику на M:

а) $d((m_1, m_2), (m_1', m_2')) = d(m_1, m_1') + d(m_2, m_2')$;

б) $d((m_1, m_2), (m_1', m_2')) = \max(d(m_1, m_1'), d(m_2, m_2'))$;

в$^!$) $d((m_1, m_2), (m_1', m_2')) = \sqrt{d(m_1, m_1')^2 + d(m_2, m_2')^2}$.

Задача 4.17$^!$. Докажите, что три метрические структуры из предыдущей задачи задают на $M_1 \times M_2$ одну и ту же топологию.

Докажите, что эта топология эквивалентна топологии произведения на $M_1 \times M_2$, которое рассматривается как произведение топологических пространств.

4.2. Тихоновский куб и гильбертов куб

Определение 4.5. Пусть I — некоторый набор индексов (возможно, несчетный), а $M = X^I$ — множество отображений из I в фиксированное топологическое пространство X. На X^I можно смотреть как на множество последовательностей точек X, индексированное I, либо как на бесконечное произведение X с собой. Обозначим через $W(i, U) \subset X^I$ множество всех отображений $I \to X$, переводящих заданный индекс i в элемент из подмножества $U \subset X$. Зададим предбазу B топологии на X^I таким образом: $U \in B$, если $U = W(i, U)$ для какого-то индекса $i \in I$ и какого-то открытого подмножества $U \subset$ $\subset X$. Такая топология называется *слабой*, или *тихоновской*.

Задача 4.18!. Дана последовательность точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ в X^I. Докажите, что она сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\alpha_k(i)$ сходится для каждого индекса $i \in I$.

Замечание. Утверждение предыдущей задачи часто формулируют так: пространство X^I со слабой топологией есть множество отображений из I в X с топологией поточечной сходимости.

Определение 4.6. Пусть I — некоторый набор индексов. Пространство $[0, 1]^I$ со слабой топологией называется *тихоновским кубом*.

Задача 4.19. Пусть на топологическом пространстве M задан набор непрерывных функций $\alpha_i : M \to [0, 1]$, проиндексированных набором индексов I. Докажите, что отображение

$$\prod \alpha_i : \, m \to \prod_{i \in I} \alpha_i(m)$$

в тихоновский куб $[0, 1]^I$ непрерывно.

Задача 4.20. Докажите, что любая точка тихоновского куба замкнута.

Задача 4.21*. Докажите, что тихоновский куб удовлетворяет условиям T2 и T3.

Задача 4.22!. Дан тихоновский куб $[0, 1]^I$, где I счетно. Докажите, что у него есть счетная база.

Указание. Докажите, что совокупность всех $U = W(i, (a, b))$ с рациональными a, b задает счетную предбазу в $[0, 1]^I$, и воспользуйтесь задачей 4.2.

Задача 4.23.** Пусть множество I имеет мощность континуума или больше. Верно ли, что тихоновский куб $[0, 1]^I$ несепарабелен?

Указание. Пусть задано счетное подмножество W хаусдорфова пространства. Докажите, что мощность замыкания W не больше континуума.

Задача 4.24!. Рассмотрим множество $M = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ — множество последовательностей вещественных чисел в $[0, 1]$, индексированных натуральными числами. Рассмотрим функцию $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$,

$$d(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}) = \sqrt{\sum i^{-2}|\alpha_i - \beta_i|^2}.$$

Докажите, что эта функция корректно определена и задает метрику на $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Определение 4.7. Метрическое пространство $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ с метрикой, построенной выше, называется *гильбертовым кубом*.

Задача 4.25!. Пусть задана последовательность $\{\alpha_i(n)\}$ точек в $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Докажите, что она сходится в тихоновской топологии тогда и только тогда, когда она сходится в топологии гильбертова куба.

Задача 4.26*. Выведите из этого, что тождественное отображение задает гомеоморфизм гильбертова куба и тихоновского куба.

Замечание. Мы получили, что если множество индексов I счетно, то тихоновский куб $[0, 1]^I$ метризуем.

Задача 4.27*. Пусть множество индексов I несчетно. Будет ли тихоновский куб $[0, 1]^I$ метризуемым?

4.3. Нормальные топологические пространства

Определение 4.8. Пусть даны непересекающиеся замкнутые подмножества $A, B \subset M$ топологического пространства M. Непрерывная функция $f\colon M \to [0, 1]$ называется *функцией Урысона*, если $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.

Определение 4.9. Напомним, что топологическое пространство *нормально* (удовлетворяет условию отделимости T4), если оно хаусдорфово и для любых непересекающихся замкнутых подмножеств $A, B \subset M$ найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 4.28. Пусть для любых непересекающихся замкнутых подмножеств $A, B \subset M$ существует функция Урысона и верно условие T1 (все точки замкнуты). Докажите, что M нормально.

Задача 4.29. Пусть M — метрическое пространство, $A \subset M$ — замкнутое подмножество, а $\varphi_A(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A)+1}$. Докажите, что φ_A непрерывно, принимает значения в $[0, 1)$ и $\varphi_A(z) = 0 \Leftrightarrow z \in A$.

Задача 4.30. Пусть f, g — непрерывные функции на топологическом пространстве M. Докажите, что функция $\max(f, g)$ непрерывна.

Указание. Докажите, что отображение $f \times g\colon M \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ непрерывно и функция $\max\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тоже непрерывна. Тогда $\max(f, g)$ задается как композиция непрерывных отображений.

Задача 4.31. Пусть M — метрическое пространство, $A, B \subset M$ — непересекающиеся замкнутые подмножества, φ_A, φ_B — функции, определенные выше, а $\psi_{AB} := \dfrac{\varphi_A}{\max(\varphi_A, \varphi_B)}$. Докажите, что $0 \leqslant \psi_{AB} \leqslant 1$, $\psi_{AB}|_A = 0$, $\psi_{AB}|_B = 1$, причем $\psi_{AB}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in A$.

Задача 4.32. В условиях предыдущей задачи докажите, что $\frac{1}{2}(\psi_{AB} + (1 - \psi_{BA}))$ есть функция Урысона.

Задача 4.33. Докажите, что любое метрическое пространство нормально.

4.4. Лемма Урысона и метризация топологических пространств

Задача 4.34*. Пусть M нормально, а $A, B \subset M$ — непересекающиеся замкнутые подмножества. Докажите, что можно найти последовательность окрестностей $U_{p/2^q} \supset A$, индексированную рациональными числами вида $0 < p/2^q < 1$ и удовлетворяющую следующим условиям:

1) для всех p, q множество B не пересекается с $U_{p/2^q}$;

2) если $p_1/2^{q_1} < p_2/2^{q_2}$, то замыкание множества $U_{p_1/2^{q_1}}$ содержится в $U_{p_2/2^{q_2}}$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией.

Задача 4.35*. В условиях предыдущей задачи определим функцию $f\colon M \to [0, 1]$ формулой

$$f(m) = \sup\{p/2^q : m \notin U_{p/2^q}\}$$

вне A и положим f равной нулю на A. Докажите, что f непрерывна и является функцией Урысона.

Указание. Докажите, что отрезки вида $(p_1/2^{q_1}, p_2/2^{q_2})$ задают предбазу топологии в $[0, 1]$. Докажите, что

$$f^{-1}((p_1/2^{q_1}, p_2/2^{q_2})) = U_{p_2/2^{q_2}} \setminus \overline{U_{p_1/2^{q_1}}}.$$

Выведите из этого, что функция f непрерывна.

Замечание. Мы получили следующую лемму Урысона: если M нормально, то для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств M существует функция Урысона.

Задача 4.36*. Пусть M — хаусдорфово пространство со счетной базой B, удовлетворяющее условию T4, I — множество всех таких пар $U_1 \subset U_2 \in B$, что $\overline{U}_1 \subset U_2$, F_{U_1,U_2} — функции Урысона, соответствующие непересекающимся замкнутым множествам $\overline{U}_1$ и $M \setminus U_2$, а $F\colon M \to [0, 1]^I$ — отображение в тихоновский куб, заданное как $F(m) = \prod_{U_1,U_2 \in I} F_{U_1,U_2}(m)$. Докажите, что F непрерывно и инъективно.

Задача 4.37*. В условиях предыдущей задачи обозначим через $G\colon F(M) \to M$ отображение, обратное F. Пусть дана такая последовательность точек $\{x_i\} \subset M$, что $F_{U_1,U_2}(x_i)$ сходится к $y \in F(M)$ для любой пары (U_1, U_2) в I. Выведите из этого, что последовательность $\{x_i\}$ сходится к $x := F^{-1}(y)$. Докажите, что G непрерывно.

Задача 4.38*. Докажите, что любое хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой, удовлетворяющее условию T4, можно реализовать как топологическое подпространство в гильбертовом кубе.

Замечание. Мы получили следующую теорему о метризации: *Всякое нормальное топологическое пространство со счетной базой метризуемо.*

Задача 4.39. Докажите, что любое подмножество гильбертова куба нормально и обладает счетной базой.

Задача 4.40. Любое ли метризуемое пространство нормально и обладает счетной базой?

Листок 5

КОМПАКТНОСТЬ

Определение 5.1. Пусть M — топологическое пространство. Назовем *покрытием* пространства M любой набор открытых подмножеств $U_i \subset M$ (возможно, бесконечный или даже несчетный), для которого $M = \bigcup U_i$. Пространство M называется *компактным*, или просто *компактом*, если из каждого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Подмножество $Z \subset M$ топологического пространства M называется *компактным*, если оно компактно в индуцированной топологии.

Задача 5.1. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ компактен. Когда компактно множество с дискретной топологией? С кодискретной топологией?

Задача 5.2*. Пусть в M задана следующая топология: открытые множества — это дополнения к конечным подмножествам (такая топология называется *кофинитной*). Найдите все компактные подмножества в M.

Задача 5.3!. Пусть Z компактно, а $Z' \subset Z$ замкнуто в Z. Докажите, что Z' тоже компактно. Следует ли из компактности подмножества его замкнутость?

Задача 5.4. Пусть топологическое пространство M хаусдорфово, $Z \subset M$ — произвольное подмножество, а $x \notin Z$ — любая точка.

а) Докажите, что у Z есть такое открытое покрытие $\{U_i\}$, что замыкание каждого U_i не содержит x.

б*) Приведите пример нехаусдорфова T1-пространства, для которого это не выполнено.

Задача 5.5!. Пусть M хаусдорфово. Докажите, что любое компактное подмножество в M замкнуто.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.6. Даны два компактных подмножества хаусдорфова пространства. Докажите, что у них есть непересекающиеся открытые окрестности.

Задача 5.7!. Дано компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что для него выполняется условие отделимости T4.

Задача 5.8*. Существует ли компактное хаусдорфово неметризуемое топологическое пространство?

Определение 5.2. Топологическое пространство называется *локально компактным*, если у любой точки найдется окрестность, замыкание которой компактно.

Задача 5.9. Дано локально компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнено условие Т3.

Задача 5.10.** Существует ли локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, в котором не выполнено первое условие счетности?

Задача 5.11.** Существует ли счетное хаусдорфово топологическое пространство, которое не локально компактно?

Задача 5.12. Дано хаусдорфово топологическое пространство X. Обозначим через $\widehat{X}$ множество $X \cup \{\infty\}$ (X, к которому добавили еще одну точку, обозначенную ∞) со следующей топологией: $U \subset \subset \widehat{X}$ открыто, либо если $\infty \in U$ и дополнение к U компактно как подмножество X, либо если $\infty \notin U$ и U открыто как подмножество X. Докажите, что это действительно топология и что пространство $\widehat{X}$ компактно.

Определение 5.3. Пространство $\widehat{X}$ называется *одноточечной компактификацией* пространства X.

Задача 5.13*. Всегда ли $\widehat{X}$ хаусдорфово?

Задача 5.14. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с естественной топологией. Докажите, что $\widehat{X}$ гомеоморфно n-мерной сфере.

Задача 5.15. Даны хаусдорфово топологическое пространство M и подмножество Z в нем. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) у любой точки $z \in Z$ существует окрестность $U \ni z$, не содержащая других точек из Z;

2) M индуцирует на Z дискретную топологию.

Определение 5.4. Замкнутое подмножество $Z \subset M$, удовлетворяющее одному из условий задачи 5.15, называется *дискретным*.

Задача 5.16. Пусть у хаусдорфова топологического пространства $Z \subset M$ есть бесконечное дискретное подмножество. Докажите, что M некомпактно.

Пусть дан набор Z_i подмножеств множества M. Будем говорить, что этот набор множеств *монотонный*, если для любых Z_i, Z_j из нашего набора $Z_i \subset Z_j$ или $Z_j \subset Z_i$.

Задача 5.17. Докажите, что если топологическое пространство M компактно, то любой монотонный набор непустых замкнутых подможеств $Z_i \subset M$ имеет непустое пересечение $\bigcap_i Z_i$.

Задача 5.18. Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что M компактно тогда и только тогда, когда у M нет бесконечных дискретных подмножеств.

Указание. Если M содержит бесконечное дискретное подмножество, то из задачи 5.16 следует, что M некомпактно. Если, наоборот, M некомпактно, то у M есть счетное покрытие $S = \{U_i\}$, никакое конечное подмножество которого не покрывает M. Заменив U_i на объединение всех U_j, $j \geqslant i$, можно считать, что $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$, причем ни одно из U_i не содержит M. Взяв дополнения, получаем набор замкнутых подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ с нулевым пересечением. Возьмите в каждом A_i точку и докажите, что получится дискретное множество.

Задача 5.19!. Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что M компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность точек из M имеет предельную точку.

Замечание 5.5. Это свойство называется *слабой секвенциальной компактностью*.

Задача 5.20.** Существует ли слабо секвенциально компактное некомпактное хаусдорфово пространство?

Задача 5.21*. Дано топологическое пространство M, необязательно хаусдорфово.

а) Может ли компактное подмножество M содержать бесконечное дискретное подмножество?

б) Может ли существовать некомпактное подмножество M, не содержащее бесконечных дискретных подмножеств?

в**) Пусть M хаусдорфово. Существует ли некомпактное подмножество M, не содержащее бесконечных дискретных подмножеств?

Задача 5.22!. Пусть $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение топологических пространств. Докажите, что для любого компактного подмножества $Z \subset M$ его образ $f(Z)$ всегда компактен.

Задача 5.23. Пусть дано подмножество $Z \subset \mathbb{R}$.

а) Докажите, что Z компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограниченно (ограниченно — значит содержится в некотором отрезке $[a, b]$).

б) Докажите, что Z компактно тогда и только тогда, когда любое его подмножество имеет супремум и инфимум в Z.

Задача 5.24!. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение топологических пространств. Докажите, что f достигает максимума и минимума на любом компактном подмножестве M.

Задача 5.25*. Пусть дано некомпактное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, которое удовлетворяет свойству отделимости T4. Постройте непрерывную функцию $f\colon M \to \mathbb{R}$, которая не достигает максимума.

Указание. Воспользуйтесь тем, что образ компакта — компакт.

Задача 5.26. Пусть $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение топологических пространств, M компактно, а N хаусдорфово. Докажите, что f переводит замкнутые множества в замкнутые.

Задача 5.27. Пусть $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение топологических пространств, M компактно, а N хаусдорфово. Предположим, что f взаимно однозначно. Докажите, что f — гомеоморфизм.

Задача 5.28. Придумайте такое непрерывное взаимно однозначное отображение топологических пространств $f\colon M \to N$, что M компактно, но f — не гомеоморфизм (N не хаусдорфово).

5.1. Компакты и произведения

Определение 5.6. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *собственным*, если для каждого компактного $K \subset Y$ прообраз $f^{-1}(K) \subset X$ компактен.

Задача 5.29!. Пусть пространство Y хаусдорфово и имеет счетную базу окрестностей в точке. Докажите, что любое собственное отображение $f\colon X \to Y$ переводит замкнутые подмножества множества X в замкнутые подмножества Y.

Указание. Пусть есть замкнутое множество $Z \subset X$, образ которого не замкнут. Выберите последовательность точек $y_i \in f(Z)$, которая сходится к точке $y \in Y$, не лежащей в $f(Z)$.

Задача 5.30.** Верно ли утверждение предыдущей задачи без предположения счетной базы?

Задача 5.31!. Пусть X, Y — компактные топологические пространства. Докажите, что произведение $X \times Y$ компактно.

Указание. Воспользовавшись тем, что множества вида $U \times V$, где U открыто в X, V открыто в Y, задают базу топологии на $X \times Y$, докажите сначала, что достаточно рассматривать покрытия $X \times Y$ множествами такого вида. Затем для каждой точки $y \in Y$ выберите конечное подпокрытие подмножества $X \times \{y\} \subset X \times Y$, состоящее из каких-то множеств $U_i \times V_i$, и заметьте, что множества $V_y = \bigcap V_i$ образуют открытое покрытие пространства Y.

Задача 5.32. Дано подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что следующие свойства равносильны:

1) X компактно;

2) X замкнуто и ограниченно (т. е. содержится в каком-то шаре).

Определение 5.7. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *открытым*, если образ любого открытого множества открыт.

Задача 5.33*. Пусть $f\colon X \to Y$ — открытое отображение, а слои $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, компактны. Всегда ли f собственное?

5.2. Теорема Тихонова

Задача 5.34. Пусть дана последовательность $\{a_i(n)\}$ отображений из $\mathbb{N}$ в $[0,1]$. Докажите, что можно выбрать такую подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots$, что $\{a_{i_k}(n)\}$ сходится для любого n.

Задача 5.35!. Выведите из этого, что тихоновский куб $[0,1]^{\mathbb{N}}$ компактен.

Задача 5.36*. Дано топологическое пространство M. Пусть задано такое (возможно, несчетное) множество $\{V_\alpha\}$ покрытий пространства M, что каждое V_α содержит $V_{\alpha'}$ либо содержится в нем (иначе говоря, $\{V_\alpha\}$ — набор покрытий, получающихся друг из друга присоединением каких-то элементов). Пусть из каждого V_α нельзя выбрать конечное подпокрытие. Докажите, что из объединения всех V_α тоже нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Задача 5.37*. Используя лемму Цорна, докажите, что у всякого некомпактного подмножества $X \subset M$ найдется покрытие $\{V_\alpha\}$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие, а если добавить к $\{V_\alpha\}$ любое не содержащееся в нем открытое множество, то из полученного покрытия можно будет выбрать конечное подпокрытие.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Мы будем называть такие покрытия *максимальными*.

Задача 5.38*. Пусть дано максимальное покрытие $\{V_\alpha\}$ некомпактного топологического пространства M. Докажите, что если открытые множества U_1, U_2 не лежат в $\{V_\alpha\}$ и их пересечение непусто, то оно тоже не лежит в $\{V_\alpha\}$. Докажите, что любое непустое конечное пересечение открытых множеств, не лежащих в $\{V_\alpha\}$, тоже не принадлежит $\{V_\alpha\}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.39*. Пусть в топологическом пространстве M задана предбаза топологии R. Пусть даны некомпактное подмножество $X \subset M$ и максимальное покрытие $\{V_\alpha\}$. Докажите, что в $\{V_\alpha\}$ можно выбрать подпокрытие из R.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Мы получили следующую теорему (теорема Александера о предбазе). *Пусть в топологическом пространстве M задана предбаза топологии S. Подмножество $X \subset M$ компактно тогда и только тогда, когда из любого покрытия X элементами из S можно выбрать конечное подпокрытие.* Теорема Александера использует аксиому выбора и (как показал Дж. Л. Келли) эквивалентна ей.

Задача 5.40*. Выведите из этого, что тихоновский куб $[0,1]^I$ компактен для любого множества I.

Указание. Рассмотрите предбазу для топологии на тихоновском кубе, составленную из подмножеств вида $[0,1] \times [0,1] \times \ldots \ldots \times (a,b) \times [0,1] \times \ldots$ (на одном месте стоит открытый интервал). Воспользуйтесь теоремой Александера.

Замечание. Компактность тихоновского куба эквивалентна такому утверждению. Рассмотрим пространство $\mathrm{Map}(I,[0,1])$ отображений из множества I в отрезок $[0,1]$ с топологией поточечной сходимости. Тогда $\mathrm{Map}(I,[0,1])$ компактно. В частности, из любой последовательности $\{a_i(x)\}$ отображений можно выбрать такую подпоследовательность $\{a_{i_k}(x)\}$, что $\{a_{i_k}(x)\}$ сходится в любом $x \in \in I$.

Определение 5.8. Пусть M — топологическое пространство, I — некоторое множество, а M^I — пространство отображений из I в M, т. е. произведение I копий пространства M. Для $x \in I$ и открытого множества $U \subset M$ рассмотрим подмножество $U(x) \subset M^I$, состоящее из всех отображений, переводящих x в U. Определим на M^I топологию с предбазой, состоящей из всех $U(x)$. Такая топология называется *тихоновской* (а также *слабой* или *топологией поточечной сходимости*).

Задача 5.41*. Пусть M компактно. Выведите из теоремы Александера, что M^I с тихоновской топологией компактно.

5.3. Основная теорема алгебры

Пусть $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — полином положительной степени с комплексными коэффициентами. Мы рассматриваем P как функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Как топологическое пространство $\mathbb{C}$ отождествляется с $\mathbb{R}^2$. Мы хотим доказать, что $P(x) = 0$ для какого-то $x \in \mathbb{C}$.

Задача 5.42. Докажите, что полином P непрерывен.

Задача 5.43. Докажите, что найдется такое C, что для всех $|x| > C$ выполняется неравенство $\dfrac{|P(x) - x^n|}{|x^n|} < 1/2$.

Указание. Возьмите $|x| > 2\max\bigl(1, \sum |a_i|\bigr)$.

Задача 5.44. Докажите, что найдется такое C, что для всех $|x| > C$ выполняется неравенство $|P(x)| > R^n$.

Указание. Возьмите $|x| > 2R\max\bigl(1, \sum |a_i|\bigr)$.

Задача 5.45. Выведите из этого, что $|P|$ достигает локального минимума в точке $a \in \mathbb{C}$.

Указание. Мы приблизили многочлен $|P|$ многочленом x^n, скорость роста которого нам известна. Из этого мы вывели, что $|P(x)| > R^n$, когда $|x|$ достаточно велик. Поэтому минимум $|P|$ на круге $|x| \leqslant R$ достигается внутри круга, а не на его границе.

Для упрощения обозначений мы будем в дальнейшем предполагать, что минимум $|P|$ достигается в нуле. Мы хотим доказать, что минимум $|P|$ равен нулю. Пусть это не так. Пусть k — самое маленькое число среди $1, 2, 3, \ldots, n$, для которого $a_k \neq 0$. Домножив P на a_0^{-1} и сделав замену $x = z\sqrt[k]{a_k^{-1}}$, мы получим многочлен вида

$$Q(z) = 1 + z^k + b_{k+1}z^{k+1} + b_{k+2}z^{k+2} + \ldots$$

Задача 5.46. Докажите, что для любого комплексного z, $|z| < 1$, выполняется неравенство

$$|Q(z) - 1 - z^k| < |z^{k+1}| \sum |b_i|.$$

Задача 5.47. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \varepsilon$, выполняется неравенство

$$\frac{|Q(z) - 1 - z^k|}{|z^k|} < \frac{1}{2}.$$

Указание. Возьмите $|z| < \dfrac{1}{2}\bigl(\sum |b_i|\bigr)^{-1}$ и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.48. Выведите из этого, что для любого положительного вещественного $c<\varepsilon$ и любого комплексного z, для которого $z^k=-c$, выполняется неравенство

$$|Q(z)-1+c| < c/2.$$

Замечание. В окрестности нуля мы приблизили Q многочленом $1+z^k$. Пользуясь этим приближением, мы находим, что $|Q(\sqrt[k]{-\varepsilon})| < |Q(0)|\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)$ для достаточно малых ε. Следовательно, локальный минимум многочлена — это всегда 0.

Задача 5.49[!]. Докажите основную теорему алгебры: каждый многочлен P положительной степени имеет корень в $\mathbb{C}$.

Листок 6

ПОТОЧЕЧНАЯ И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

На протяжении этого листка разрешается пользоваться следующей формой теоремы Тихонова. Пусть X — компактное топологическое пространство, I — произвольное множество, а X^I — пространство отображений из I в X с топологией поточечной сходимости. Тогда X^I компактно.

Задача 6.1. Рассмотрим пространство функций из отрезка в отрезок с топологией поточечной сходимости. Докажите, что предел непрерывных функций может быть разрывен.

Определение 6.1. Пусть X, Y — метрические пространства.

Функция $f\colon X \to Y$ называется *равномерно непрерывной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что образ любого ε-шара лежит в каком-то δ-шаре.

Набор непрерывных отображений $\{f_\alpha\colon X \to Y\}$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого ε найдется такое δ, что образ любого δ-шара под действием любого f_α содержится в некотором ε-шаре (возможно, зависящем от f_α и δ-шара).

Задача 6.2. Пусть дано отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств, которое переводит последовательности Коши в последовательности Коши. Докажите, что f непрерывно как отображение топологических пространств. Всякое ли непрерывное отображение переводит последовательности Коши в последовательности Коши?

Задача 6.3[!]. Пусть X, Y — метрические пространства, а $\{f_i\}$ — равностепенно непрерывная последовательность непрерывных отображений из X в Y. Предположим, что $\{f_i\}$ сходится к f в топологии поточечной сходимости. Докажите, что f непрерывна.

Указание. Докажите, что f равномерно непрерывна с теми же самыми числами ε, δ, что и $\{f_i\}$, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Зафиксируем компактные метрические пространства X, Y, и пусть $\mathrm{Map}(X, Y)$ — множество непрерывных отображений из X в Y.

Задача 6.4. Для любых отображений $f, g \in \mathrm{Map}(X, Y)$ определим число $d_{\sup}(f, g)$ как $\sup\limits_{x\in X} d(f(x), g(x))$. Докажите, что $d_{\sup}(f, g)$ корректно определено и задает метрику на $\mathrm{Map}(X, Y)$.

Определение 6.2. Эта метрика называется sup-*метрикой* на $\mathrm{Map}(X,Y)$.

Задача 6.5!. Предположим, что равностепенно непрерывная последовательность отображений $\{f_i\}\subset\mathrm{Map}(X,Y)$ поточечно сходится к f на каком-то плотном подмножестве $X_0\subset X$. Докажите, что она сходится к f в топологии, заданной sup-метрикой.

Указание. Пусть $\sup\limits_{x\in X} d(f(x), f_i(x)) > C$ для любого i. Найдите сходящуюся последовательность точек $\{x_i\}\subset X_0$, для которых $d(f(x_i), f_i(x_i)) > C$, и пусть x — ее предел. В силу равностепенной непрерывности расстояние $d(f_i(x_i), f_i(x))$ стремится к нулю. Воспользовавшись неравенством треугольника

$$d(f_i(x), f(x)) + d(f_i(x_i), f_i(x)) \geqslant d(f(x), f_i(x_i)),$$

получите противоречие.

Задача 6.6!. Пусть X и Y — компактные метрические пространства со счетной базой, а $\{f_i\}\subset\mathrm{Map}(X,Y)$ — равностепенно непрерывное семейство отображений. Докажите, что у $\{f_i\}$ есть сходящаяся подпоследовательность.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Тихонова, чтобы найти подпоследовательность, которая сходится поточечно на плотном счетном подмножестве.

Задача 6.7** (теорема Арцела—Асколи)**.** Пусть дано замкнутое (в смысле sup-метрики) и равностепенно непрерывное множество отображений $\Psi\subset\mathrm{Map}(X,Y)$, где X и Y компактны. Докажите, что Ψ компактно в топологии, заданной sup-метрикой.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.8*. Пусть заданы компактное подмножество $K\subset X$ и открытое подмножество $V\subset Y$. Обозначим через $U(K,V)\subset\mathrm{Map}(X,Y)$ множество всех отображений, переводящих K в V. Рассмотрим топологию на $\mathrm{Map}(X,Y)$, заданную предбазой из всех $U(K,V)$. Докажите, что та же самая топология задается sup-метрикой.

Определение 6.3. Эта топология на $\mathrm{Map}(X,Y)$ называется *компактно-открытой топологией*, или *топологией равномерной сходимости*.

Задача 6.9. Докажите, что топология поточечной сходимости слабее топологии равномерной сходимости, т. е., другими словами, что тождественное отображение из $\mathrm{Map}(X,Y)$ с топологией равномерной сходимости в $\mathrm{Map}(X,Y)$ с топологией поточечной сходимости непрерывно.

Определение 6.4. Пусть Z — подмножество метрического пространства M. *Диаметром* Z называется число $\mathrm{diam}(Z) := \sup\limits_{x,y\in Z} d(x,y)$.

Задача 6.10. Пусть $f\in \mathrm{Map}(X,Y)$ — непрерывное отображение, X компактно, ε — вещественное число, а $\delta(f,\varepsilon)$ — супремум чисел $\mathrm{diam}(f(B))$ по всем ε-шарам B в X. Докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(f,\varepsilon)=0$.

Указание. Пусть задана такая сходящаяся к нулю последовательность $\{\varepsilon_i\}$, что для какого-то набора точек $x_i\in X$ и положительной константы C имеем $\mathrm{diam}\, f(B_{\varepsilon_i}(x_i)))>C$. Рассмотрим предельную точку x последовательности $\{x_i\}$. Тогда в каждом ε-шаре вокруг x содержится $B_{\varepsilon_i}(x_i)$ (для достаточно большого i), из чего следует, что образ этого ε-шара имеет диаметр больше C. Значит, отображение f не непрерывно.

Задача 6.11[!]. Пусть $f\in \mathrm{Map}(X,Y)$ непрерывно и X компактно. Докажите, что f равномерно непрерывно.

Указание. Это утверждение эквивалентно тому, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(f,\varepsilon)=0.$$

Задача 6.12. Пусть дано подмножество $\Psi\subset \mathrm{Map}(X,Y)$. Докажите, что Ψ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{f\in\Psi}\delta(f,\varepsilon)=0.$$

Задача 6.13*. Пусть $d_{\sup}(f,g)<\gamma$. Докажите, что $\delta(f,\varepsilon)<$ $<\delta(g,\varepsilon)+\gamma$.

Задача 6.14*. Пусть $\{f_i\}$ — последовательность Коши в пространстве $(\mathrm{Map}(X,Y),d_{\sup})$. Докажите, что она равностепенно непрерывна.

Указание. Нам нужно доказать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup_i\delta(f_i,\varepsilon)=0$. Воспользовавшись предыдущей задачей, убедитесь, что для всех f_i, лежащих в каком-то γ-шаре в $(\mathrm{Map}(X,Y),d_{\sup})$, числа $\delta(f_i,\varepsilon)$ отличаются не больше чем на γ. Выведите из этого, что $\sup_i\delta(f_i,\varepsilon)<$ $<\delta(f_N,\varepsilon)+\gamma$ для фиксированного N, а следовательно,

$$\sup_i\delta(f_i,\varepsilon)<\gamma+\max_{i\leqslant N}\delta(f_i,\varepsilon).$$

Предел этого выражения при $\varepsilon \to 0$ не больше γ, поскольку все f_i равномерно непрерывны.

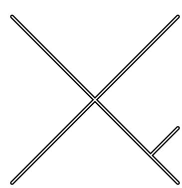
Задача 6.15*. Докажите, что $(\mathrm{Map}(X, Y), d_{\sup})$ — полное метрическое пространство.

Задача 6.16*. Является ли $(\mathrm{Map}(X, Y), d_{\sup})$ локально компактным?

6.1. Кривая Пеано

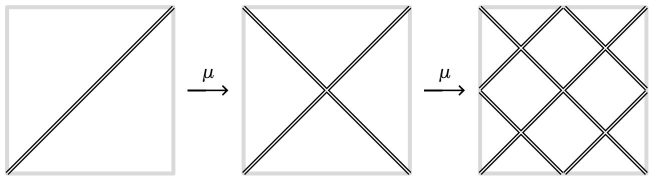
Пусть дан отрезок $[a, b]$. Отображение $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ называется *линейным*, если $f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ для любого $0 < \lambda < 1$. Отображение называется *кусочно линейным*, если отрезок разбит на подотрезки $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, … и f линейно на каждом из этих подотрезков. Образ кусочно линейного отображения — это, очевидно, ломаная.

Пусть дано кусочно линейное отображение f из отрезка $[0, 1]$ в квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ со следующим свойством: все сегменты ломаной $f([0, 1])$ параллельны прямой $x = y$ либо прямой $x = -y$.



Иными словами, для каждого подотрезка $[a, a_1]$, на котором f линейно, f отображает $[a, a_1]$ в диагональ некоторого квадрата Q со сторонами, параллельными осям координат. Пусть $\mathscr{P}l$ — пространство таких кусочно линейных отображений.

Определим операцию μ, которая делает из кусочно линейного отображения $f \in \mathscr{P}l$ с k линейными сегментами кусочно линейное отображение с $4k$ линейными сегментами:



Определим $\mu(f)$ следующим образом.

1. Обозначим через $a_0, a_1, \ldots, a_k$ концы сегментов, на которых функция f линейная. Тогда $\mu(f)$ отображает a_i в $f(a_i)$.

2. Разобьем каждый из сегментов $[a_i, a_{i+1}]$ на четыре равные части:

$$[b_{4i}, b_{4i+1}],\ [b_{4i+1}, b_{4i+2}],\ [b_{4i+2}, b_{4i+3}],\ [b_{4i+3}, b_{4i+4}];$$

$\mu(f)$ отображает отрезок $[b_{4i}, b_{4i+1}]$ линейно в $\left[f(a_i), f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)\right]$, а $[b_{4i+3}, b_{4i+4}]$ в $\left[f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right), f(a_{i+1})\right]$.

3. Рассмотрим квадрат, диагональю которого является отрезок $[f(a_i), f(a_{i+1})]$, и перенумеруем его вершины по часовой стрелке: $f(a_i), A, f(a_{i+1}), B$. Тогда $\mu(f)$ отображает отрезок $[b_{4i+1}, b_{4i+2}]$ линейно в $\left[f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right), B\right]$, а $[b_{4i+2}, b_{4i+3}]$ в $\left[B, f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)\right]$.

Задача 6.17. Рассмотрим отрезок и квадрат как метрические пространства со стандартной метрикой. Пусть $f \in \mathscr{P}l$ и самый большой прямолинейный сегмент $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ соответствующей ломаной имеет длину k. Докажите, что тогда $d_{\sup}(f, \mu(f)) \leqslant k/\sqrt{2}$.

Задача 6.18. Пусть $f \in \mathscr{P}l$ и самый большой прямолинейный сегмент $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ соответствующей ломаной имеет длину k. Докажите, что тогда самый большой прямолинейный сегмент в $\mu(f)$ имеет длину $k/2$.

Задача 6.19. Пусть $f_0 \in \mathscr{P}l$, $f_1 = \mu(f_0), \ldots, f_n = \mu(f_{n-1})$, а самый большой прямолинейный сегмент в ломаной, соответствующей f_0, имеет длину k. Докажите, что

$$d_{\sup}(f_n, f_{n+1}) < \frac{k}{2^n\sqrt{2}}.$$

Задача 6.20!. Докажите, что $\{f_i\}$ — последовательность Коши в метрике $d_{\sup}$.

Задача 6.21. Пусть $f \in \mathscr{P}l$ и для всех прямолинейных сегментов $[a_i, a_{i+1}]$ в f длина отрезка $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ не больше чем $\rho(a_{i+1} - a_i)$, где ρ — какое-то положительное вещественное число. Докажите, что $\delta(f, \varepsilon) \leqslant \rho\varepsilon$, где $\delta(f, \varepsilon)$ — функция, определенная выше.

Задача 6.22. Пусть $f_0 \in \mathscr{P}l$, $f_1 = \mu(f_0)$, $\ldots$, $f_n = \mu(f_{n-1})$, и пусть для всех прямолинейных сегментов $[a_i, a_{i+1}]$ в f_0 длина отрезка $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ не больше чем $\rho(a_{i+1} - a_i)$. Докажите, что $\delta(f_n, \varepsilon) \leqslant$ $\leqslant \rho 2^n \varepsilon$.

Задача 6.23. Пусть $f \in \mathscr{P}l$, а самый большой прямолинейный сегмент $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ соответствующей ломаной имеет длину k. Докажите, что $\delta(\mu(f), \varepsilon) \leqslant 2\frac{k}{\sqrt{2}} + \delta(f, \varepsilon)$.

Задача 6.24. Пусть $f_0 \in \mathscr{P}l$, $f_1 = \mu(f_0), \ldots, f_n = \mu(f_{n-1})$, а самый большой прямолинейный сегмент в ломаной, соответствующей f_0, имеет длину k. Докажите, что

$$\delta(f_n, \varepsilon) \leqslant 4\frac{k}{2^{n-m}\sqrt{2}} + \rho 2^m \varepsilon \qquad (*)$$

для любых n, m $(n > m)$.

Задача 6.25. В предыдущей задаче возьмем $\varepsilon < 2^{-2m}$, $n > 2m$. Выведите из неравенства (*), что

$$\delta(f_n, \varepsilon) \leqslant \frac{4k\sqrt{2} + \rho}{2^{-m}}.$$

Докажите, что для произвольного i выполняется неравенство

$$\delta(f_i, \varepsilon) \leqslant \max\left(\frac{4k\sqrt{2} + \rho}{2^{-m}}, \rho 2^{2m} \varepsilon\right).$$

Задача 6.26!. Пусть f_0 линейно отображает $[0, 1/2]$ в отрезок $[(0, 0), (1, 1)]$, а $[1/2, 1]$ — в отрезок $[(1, 1), (0, 0)]$. Докажите, что множество $\{f_i\}$ равностепенно непрерывно.

Указание. Выведите из предыдущей задачи, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_i (\delta(f_i, \varepsilon)) = 0.$$

Задача 6.27. Выведите из теоремы Арцела—Асколи, что предел $\lim f_i$ (в sup-метрике) существует и является непрерывной функцией $\mathscr{P} : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$.

Определение 6.5. Определенная выше функция $\mathscr{P}$ называется *кривой Пеано*.

Задача 6.28. Найдите $\mathscr{P}(q)$, где $q = \frac{a}{2^n}$ $(a \in \mathbb{Z})$ — двоично-рациональное число.

Задача 6.29. Пусть Q_2 — множество двоично-рациональных чисел. Докажите, что $\mathscr{P}(Q_2)$ плотно в квадрате.

Задача 6.30!. Докажите, что образ $\mathscr{P}$ — это весь квадрат.

Указание. Воспользуйтесь тем, что образ компакта компактен.

Задача 6.31!. Можно ли сюръективно и непрерывно отобразить $[0, 1]$ на куб? На куб с выколотой точкой?

Листок 7

СВЯЗНОСТЬ

Определение 7.1. Пусть дано топологическое пространство M. Подмножество $W \subset M$ называется *открыто-замкнутым*, если оно открыто и замкнуто. Пространство M называется *связным*, если любое его открыто-замкнутое подмножество — это либо $\varnothing$, либо само M. Подмножество $Z \subset M$ называется *связным*, если оно связно в индуцированной топологии.

Задача 7.1. Связно ли $\mathbb{R}$?

Задача 7.2!. Пусть X, Y связны. Докажите, что $X \times Y$ связно.

Указание. Пусть в $X \times Y$ есть открыто-замкнутое подмножество U. Рассмотрим пересечение $U \cap X \times \{y\}$. Докажите, что $X \times \{y\}$ (с индуцированной топологией) гомеоморфно X, а $U \cap X \times \{y\}$ открыто-замкнуто там.

Задача 7.3. Связно ли $\mathbb{R}^n$ (с естественной топологией)?

Задача 7.4. Пусть в топологическом пространстве M любые две точки x, y можно «соединить путем», т. е. найти такое непрерывное отображение $\varphi\colon [0, 1] \to M$, что $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$. Докажите, что M связно.

Замечание. В такой ситуации пространство M называется *линейно связным*.

Задача 7.5. Выкинем точку из окружности или плоскости. Докажите, что получится связное пространство.

Задача 7.6!. а) Выкинем конечное число точек из $\mathbb{R}^2$. Докажите, что получится связное пространство.

б) Выкинем точку из интервала. Докажите, что получится несвязное пространство.

Задача 7.7!. Докажите, что следующие пространства попарно негомеоморфны: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, окружность.

Задача 7.8!. Докажите, что отрезок, интервал и полуинтервал попарно негомеоморфны.

Задача 7.9. Дано непрерывное отображение $f\colon X \to Y$. Пусть X связно. Докажите, что $f(X)$ связно.

Задача 7.10!. Дано связное подмножество в отрезке $[0, 1]$. Докажите, что это интервал, полуинтервал или отрезок.

Задача 7.11. Дано непрерывное отображение $f\colon X \to \mathbb{R}$. Пусть X связно, а f принимает и положительные, и отрицательные значения. Докажите, что f где-то обращается в нуль.

Задача 7.12*. Пусть дано метризуемое счетное связное пространство M. Докажите, что M — это точка.

Задача 7.13. Пусть даны связные подмножества топологического пространства M, пересечение которых непусто. Докажите, что их объединение связно.

Задача 7.14!. Пусть $x \in M$ — точка в топологическом пространстве, а W — объединение всех связных подмножеств, которые ее содержат. Докажите, что W связно.

Определение 7.2. В такой ситуации W называется *компонентой связности* точки x (или просто *компонентой связности*).

Задача 7.15. Докажите, что связное подмножество $W \subset M$ есть компонента связности тогда и только тогда, когда любое связное подмножество, содержащее W, с ним совпадает.

Задача 7.16. Докажите, что M разбивается в объединение непересекающихся компонент связности.

Задача 7.17. Докажите, что все компоненты связности пространства M замкнуты.

7.1. Вполне несвязные пространства

Определение 7.3. Топологическое пространство M называется *вполне несвязным*, если любая его компонента связности состоит из одной точки.

Задача 7.18. Докажите, что множество рациональных чисел (с топологией, индуцированной с $\mathbb{R}$) вполне несвязно. Докажите, что оно не дискретно.

Задача 7.19*. Докажите, что пространство p-адических чисел вполне несвязно.

Задача 7.20*. Докажите, что произведение вполне несвязных пространств вполне несвязно.

Задача 7.21. Пусть дано хаусдорфово топологическое пространство с предбазой S. Пусть все элементы S открыто-замкнуты. Докажите, что S вполне несвязно.

Задача 7.22!. Рассмотрим множество $\{0, 1\}$ с дискретной топологией, и пусть $\{0, 1\}^I$ — произведение I копий множества $\{0, 1\}$

с тихоновской топологией, где I — произвольный набор индексов. Докажите, что $\{0, 1\}^I$ вполне несвязно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.23*. Пусть дано компактное хаусдорфово топологическое пространство M, и пусть M_1 — множество его компонент связности, а $\pi\colon M \to M_1$ — естественная проекция (точка переходит в свою компоненту связности). Введем на M_1 такую топологию: подмножество $U \subset M_1$ открыто, если $\pi^{-1}(U) \subset M$ открыто. Докажите, что M_1 вполне несвязно. Докажите, что любое непрерывное отображение $\pi_2\colon M \to M_2$ из M во вполне несвязное пространство M_2 раскладывается в композицию непрерывных отображений $M \xrightarrow{\pi} M_1 \to$ $\to M_2$ (в таком случае говорится, что «отображение π_2 пропускается через π»).

Задача 7.24. Пусть даны открытое подмножество U компактного пространства и набор замкнутых подмножеств $\{K_i\}$, пересечение которых содержится в U. Докажите, что из $\{K_i\}$ можно выбрать конечный поднабор, пересечение элементов которого содержится в U.

Задача 7.25*. Пусть дано вполне несвязное компактное хаусдорфово топологическое пространство M. Докажите, что каждая точка $x \in M$ является пересечением всех открыто-замкнутых подмножеств M, которые ее содержат.

Указание. Пусть P — пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств пространства M, содержащих x. Очевидно, что оно замкнуто. Докажите, что оно равно $\{x\}$ либо несвязно. Если оно несвязно, то P распадается в объединение двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств P_1, P_2. Воспользовавшись тем, что в компактном хаусдорфовом пространстве выполняется аксиома T4 (докажите это), найдем у P_1, P_2 непересекающиеся открытые окрестности U_1, U_2. Выведите из предыдущей задачи, что в $U_1 \cup$ $\cup U_2$ содержится открыто-замкнутое подмножество $W \subset M$, содержащее x. Докажите, что множества $W \cap U_i$ открыто-замкнуты, и выведите из этого, что P — это $\{x\}$.

Задача 7.26*. Пусть дано вполне несвязное компактное хаусдорфово топологическое пространство M. Докажите, что открыто-замкнутые множества образуют базу топологии M.

Указание. Пусть даны открытое подмножество $U \subset M$ и в нем точка x. Возьмем у каждой точки $M \setminus U$ открыто-замкнутую окрестность, не содержащую x (докажите, что это можно сделать). Мы получим покрытие $\{U_\alpha\}$ множества $M \setminus U$. Поскольку $M \setminus U$ компактно, из $\{U_\alpha\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_n$. Докажите, что дополнение к $\bigcup U_i$ открыто-замкнуто, содержит x и содержится в U.

Задача 7.27*. Пусть дано вполне несвязное компактное хаусдорфово топологическое пространство M, и пусть $x, y \in M$ — две различные точки. Докажите, что M допускает такое непрерывное отображение в $\{0, 1\}$ (с дискретной топологией), что x переходит в 0, а y в 1.

Задача 7.28*. Пусть дано вполне несвязное компактное хаусдорфово топологическое пространство M, и пусть I — множество всех непрерывных отображений M в $\{0, 1\}$. Определите естественное отображение $M \to \{0, 1\}^I$. Докажите, что это непрерывное вложение и что образ M замкнут.

Задача 7.29*. Пусть M — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

1) M вполне несвязно;

2) M может быть вложено в $\{0, 1\}^I$ для какого-то множества индексов I.

Замечание. Напомним, что если компакт M допускает непрерывное инъективное отображение $f\colon M \to X$ в хаусдорфово пространство X, то f — гомеоморфизм между M и $f(M) \subset X$ с индуцированной топологией.

Листок 8

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И ПРОСТРАНСТВО ПЕТЕЛЬ

8.1. Линейная связность

Определение 8.1. Пусть M — топологическое пространство. Напомним, что *путем* в M называется непрерывное отображение $\varphi\colon [a, b] \to M$. В этом случае говорится, что путь φ *соединяет точки* $\varphi(a)$ *и* $\varphi(b)$. M называется *линейно связным* (см. задачу 7.4), если любые две его точки можно соединить путем.

Задача 8.1. Пусть a, b, c лежат в M, причем a можно соединить путем с b, а b с c. Докажите, что a можно соединить путем с c.

Задача 8.2. Выведите из этого, что объединение линейно связных подмножеств M, содержащих данную точку $x \in M$, линейно связно.

Определение 8.2. Объединение всех линейно связных подмножеств, содержащих какую-то фиксированную точку x, называется *компонентой линейной связности* пространства M.

Задача 8.3. Рассмотрим следующее подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$: график функции $\sin(1/t)$, объединенный с отрезком $[(0, 1), (0, -1)]$. Докажите, что X локально компактно, связно и не линейно связно. Найдите компоненты линейной связности.

Задача 8.4*. Найдите компактное и связное метризуемое топологическое пространство, имеющее бесконечное количество компонент линейной связности.

Определение 8.3. Пусть $\{M_\alpha\}$ — набор топологических пространств, индексированный множеством $\mathfrak{A}$. *Несвязное объединение* $\bigsqcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} M_\alpha$ — это топологическое пространство, точками которого являются пары (α, m), $\alpha \in \mathfrak{A}$, $m \in M_\alpha$, а база топологии задается открытыми множествами во всех M_α.

Задача 8.5. Докажите, что несвязное объединение одноточечных пространств дискретно. Докажите, что естественная проекция $\bigsqcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} M_\alpha \to \mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$ с дискретной топологией непрерывна.

Определение 8.4. Топологическое пространство M называется *локально связным (локально линейно связным)*, если каждая окрестность точки $x \in M$ имеет базу из связных (линейно связных) окрестностей.

Задача 8.6. Пусть дано топологическое пространство M. Докажите, что если M локально связно (локально линейно связно), то M представляется в виде несвязного объединения своих компонент связности (линейной связности).

Задача 8.7. Докажите, что связное пространство линейно связно, если оно локально линейно связно.

Задача 8.8. Пусть дано открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что оно локально линейно связно.

8.2. Геодезическая связность

Определение 8.5. Пусть M — полное локально компактное метрическое пространство. Напомним, что *геодезической* в M называется отображение $[a, b] \to M$, которое сохраняет метрику[1]. Говорят, что *M геодезически связно*, если любые две точки можно соединить геодезической. Естественно, геодезически связное пространство линейно связно.

Определение 8.6. Пусть M — полное локально компактное метрическое пространство. Говорят, что *M липшицево связно с константой Липшица* $C \geqslant 1$, если для любых $x, y \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность точек $x_1 = x$, x_2, …, $x_n = y$, что $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$, а $\sum\limits_i d(x_i, x_{i+1}) \leqslant Cd(x, y)$. Иначе говоря, мы можем расставить n точек между x и y таким образом, что они отстоят друг от друга не больше чем на ε, а длина ломаной с вершинами в этих точках не больше $Cd(x, y)$.

Задача 8.9*. Докажите, что метрическое пространство M геодезически связно тогда и только тогда, когда M липшицево связно с константой Липшица 1.

Указание. Это теорема Хопфа—Ринова.

Задача 8.10!. Пусть (M, d) — липшицево связное метрическое пространство с константой C. Определим функцию $d_h : M \times M \to \mathbb{R}$ как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf\Big(\sum d(x_i, x_{i+1})\Big),$$

где inf берется по всем таким последовательностям $x_1 = x$, x_2, …,

1 Локально. — *Прим. ред.*

$x_n = y$, что $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$. Докажите, что $d(x, y) \leqslant d_h(x, y) \leqslant Cd(x, y)$ для любых $x, y \in M$. Докажите, что d_h — метрика и что (M, d) гомеоморфно (M, d_h).

Задача 8.11*. Докажите, что (M, d_h) липшицево связно с любой константой $C > 1$.

Задача 8.12*. Докажите, что (M, d_h) удовлетворяет условию Хопфа—Ринова (а следовательно, геодезически связно).

Определение 8.7. Напомним, что отображение $\varphi\colon [a, b] \to \to M$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $C > 0$, если $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant C|x - y|$ для любых $x, y \in [a, b]$. Легко видеть, что липшицево отображение непрерывно.

Задача 8.13*. Пусть M — локально компактное полное метрическое пространство. Докажите, что M липшицево связно с константой C тогда и только тогда, когда любые две точки можно соединить путем, удовлетворяющим условию Липшица с той же самой константой.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и неравенством $d(x, y) \leqslant d_h(x, y) \leqslant Cd(x, y)$.

Замечание. Мы получили, что липшицево связное метрическое пространство линейно связно.

Задача 8.14. Рассмотрим окружность S на плоскости с индуцированной метрикой. Докажите, что S липшицево связна с константой $\pi/2$.

Задача 8.15*. Докажите, что $\pi/2$ — наименьшая из констант, для которых окружность с такой метрикой липшицево связна.

Задача 8.16.** Рассмотрим отображение $(0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, заданное в полярных координатах функцией $\theta = 1/x$, $r = x$ (это спираль, которая наматывается вокруг нуля с шагом $1/2\pi n$). Пусть X — замыкание графика этого отображения (оно, очевидно, состоит из этого графика и нуля). Докажите, что X линейно связно. Докажите, что X не липшицево связно, какую бы константу C мы не взяли.

Задача 8.17*. Пусть M — локально компактное полное метрическое пространство. Обозначим через $S_\varepsilon(x)$ сферу радиуса ε с центром в точке x. Докажите, что следующие условия равносильны:

1) M липшицево связно с константой C;

2) для любых $x, y \in M$ и любых $r_1, r_2 > 0$, для которых $r_1 + r_2 \leqslant 1$, расстояние между сферами $S_{dr_1}(x)$, $S_{dr_2}(y)$ не больше $Cd(1 - r_1 - r_2)$, где $d = d(x, y)$.

Указание. Чтобы вывести из липшицевой связности утверждение 2, проведите через x, y кривую Липшица. Из утверждения 2 липшицева связность следует непосредственно. Расстояние от точки x до сферы $S_{d(1-C^{-1}\varepsilon)}(y)$ не больше ε; возьмем в качестве x_2 точку сферы, реализующую это расстояние (что возможно, поскольку по теореме Хопфа—Ринова сфера компактна), и применим индукцию.

Замечание. Напомним, что условие Хопфа—Ринова (в одной из версий) состоит в том, что расстояние между сферами $S_{dr_1}(x)$ и $S_{dr_2}(y)$ равно $d(1-r_1-r_2)$.

8.3. Пространство петель

Определение 8.8. Пусть (M, x) — топологическое пространство с отмеченной точкой. Рассмотрим множество $\Omega(M, x)$ путей $\varphi\colon [0,1] \to M$, $\varphi(0) = \varphi(1) = x$, с компактно-открытой топологией (предбаза этой топологии — множества $U(K, W)$ отображений, переводящих заданный компакт $K \subset [0,1]$ в заданное открытое множество $W \subset M$). Тогда $\Omega(M, x)$ называется *пространством петель* для (M, x).

Задача 8.18!. Пусть M метризуемо. Докажите, что $\Omega(M, x)$ тоже метризуемо и метрика задается по формуле

$$d(\gamma, \gamma') = \sup_{x\in[0,1]} d(\gamma(x), \gamma'(x)).$$

Задача 8.19. Пусть X, Y — компакты, а $\mathscr{W}$ — пространство отображений из X в топологическое пространство M, снабженное компактно-открытой топологией. Постройте биекцию между непрерывными отображениями из Y в $\mathscr{W}$ и непрерывными отображениями $X \times Y \to M$.

Задача 8.20!. Пусть $\gamma, \gamma' \in \Omega(M, x)$ — точки в пространстве петель. Постройте биекцию между следующими множествами:

1) пути $\Gamma\colon [0,1] \to \Omega(M, x)$, соединяющие γ и γ';

2) непрерывные отображения Ψ из квадрата $[0,1] \times [0,1]$ в M, переводящие $\{0,1\} \times [0,1]$ в x и такие, что $\Psi|_{[0,1]\times\{0\}} = \gamma$, $\Psi|_{[0,1]\times\{1\}} = \gamma'$.

Определение 8.9. Пути $\gamma, \gamma' \in \Omega(M, x)$, для которых такое отображение $\Psi\colon [0,1] \times [0,1] \to M$ существует, называются *гомотопными*, а Ψ — связывающей их *гомотопией*.

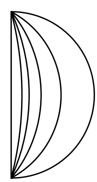
Задача 8.21. Докажите, что множество всех петель, гомотопных $\gamma \in \Omega(M, x)$, — это компонента линейной связности точки $\gamma \in \in \Omega(M, x)$.

Задача 8.22. Докажите, что гомотопия петель является отношением эквивалентности.

Замечание. Гомотопные петли также называют *гомотопически эквивалентными*.

Определение 8.10. Пусть (M, x) линейно связно. Множество классов гомотопической эквивалентности петель обозначается через $\pi_1(M, x)$.

Задача 8.23*. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — объединение отрезка с концами $(0, 1)$, $(0, -1)$ и дуг окружностей диаметра $2, 3, 4, 5, \ldots$, соединяющих $(0, 1)$ и $(0, -1)$.



Докажите, что M линейно связно. Докажите, что для любого $x \in \in M$ пространство $\Omega(M, x)$ не локально линейно связно.

Задача 8.24*. Пусть (M, d) — такое геодезически связное локально компактное метрическое пространство, что для некоторого $\delta > 0$ и любых точек $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta$, геодезическая, соединяющая x и y, единственна. Пусть $\Delta_\delta \subset M \times M$ — множество пар $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta$. Рассмотрим отображение $\Delta_\delta \to M$, ставящее в соответствие паре точек середину соединяющей их геодезической. Докажите, что оно непрерывно.

Указание. Пусть $\{(x_i, y_i)\}$ — последовательность таких пар, сходящихся к (x, y), а $\{z_i\}$ — последовательность середин геодезических. В силу локальной компактности у $\{z_i\}$ есть предельные точки и нет бесконечных дискретных подмножеств. Любая предельная точка последовательности $\{z_i\}$ будет серединой геодезической, соединяющей x и y. Следовательно, у $\{z_i\}$ есть единственная предельная точка.

Задача 8.25*. Рассмотрим отображение $\Psi\colon \Delta_\delta \times [0, 1] \to M$, ставящее паре точек $x, y \in M$, $d(x, y) = d$, и числу $t \in [0, 1]$ в соответствие точку $\gamma_{x,y}(t/d)$, где $\gamma_{x,y}$ — геодезическая, соединяющая x и y

(если эти точки совпадают, положим $\Psi(x, y, t) = x$). Докажите, что это отображение непрерывно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и конструкцией геодезической как предела середин отрезков, которая приводилась в доказательстве теоремы Хопфа—Ринова.

Определение 8.11. Пусть M — метрическое пространство. Путь $\gamma\colon [0,1] \to M$ называется *кусочно геодезическим*, если отрезок $[0,1]$ разбит на подотрезки $[0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, …, $[a_n, 1]$ и на каждом из этих отрезков γ удовлетворяет условию $d(\gamma(x), \gamma(y)) = \lambda_i |x-y|$ для какой-то константы λ_i

Иначе говоря, кусочно геодезический путь представляет собой ломаную, каждый отрезок которой — геодезическая (с точностью до линейной замены переменных).

Замечание. Если M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ с естественной метрикой, то геодезические, как было доказано в листке 4, — это отрезки прямой. Таким образом, кусочно геодезические пути — это ломаные. Такие отображения также называются *кусочно линейными*.

Задача 8.26*. В условиях задачи 8.24 рассмотрим $\Omega(M, x)$ как метрическое пространство (с sup-метрикой). Докажите, что любая петля $\gamma \in \Omega(M, x)$ гомотопна кусочно геодезической, причем гомотопию можно выбрать в любой ε-окрестности $B_\varepsilon(\gamma) \subset \Omega(M, x)$.

Задача 8.27*. Выведите из этого, что $\Omega(M, x)$ локально линейно связно.

Замечание. В такой ситуации $\pi_1(M, x)$ — множество связных компонент пространства $\Omega(M, x)$.

Задача 8.28. Пусть M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\Omega(M, x)$ локально линейно связно.

Указание. Докажите, что любую петлю можно прогомотопировать (в произвольно малой ε-окрестности) в кусочно линейную.

8.4. Фундаментальная группа

Задача 8.29. Пусть даны петли $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(M, x)$. Рассмотрим петлю $\gamma_1\gamma_2 \in \Omega(M, x)$, которая задается следующим образом:

$$\gamma_1\gamma_2(\lambda) = \begin{cases} \gamma_1(2\lambda), & \lambda \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2\lambda - 1), & \lambda \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Докажите, что класс гомотопии петли $\gamma_1\gamma_2$ зависит только от классов гомотопии петель γ_1, γ_2: если $\gamma_1 \sim \gamma_1'$, $\gamma_2 \sim \gamma_2'$, то $\gamma_1\gamma_2 \sim \gamma_1'\gamma_2'$.

Задача 8.30. Докажите, что $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ гомотопно $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$.

Задача 8.31. Пусть дана петля $\gamma \in \Omega(M, x)$. Обозначим через γ^{-1} петлю $\gamma^{-1}(x) = \gamma(1-x)$. Докажите, что петли $\gamma\gamma^{-1}$ и $\gamma^{-1}\gamma$ гомотопны тривиальной петле $[0, 1] \to x$.

Замечание. Петли, гомотопные тривиальной петле, называются *гомотопными нулю*.

Задача 8.32[!]**.** Докажите, что операция $(\gamma_1, \gamma_2) \to \gamma_1\gamma_2$ задает на $\pi_1(M, x)$ структуру группы.

Определение 8.12. Эта группа называется *фундаментальной группой* пространства M.

Задача 8.33. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение линейно связных пространств, а $x \in X$ — произвольная точка. Рассмотрим соответствующее отображение

$$\check{f}\colon \Omega(X, x) \to \Omega(Y, f(y)), \quad \gamma \to \gamma \circ f.$$

Докажите, что $\check{f}$ переводит гомотопные пути в гомотопные и индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп.

Задача 8.34. Пусть M — линейно связное топологическое пространство, а $x, y \in M$ — две его точки. Рассмотрим пространство $\Omega(M, x, y)$ путей $[0, 1] \to M$, соединяющих x и y, с компактно-открытой топологией. Как и выше, пути называются гомотопными (гомотопически эквивалентными), если они лежат в одной компоненте линейной связности $\Omega(M, x, y)$. Определим операцию

$$\Omega(M, x, y) \times \Omega(M, y, z) \to \Omega(M, x, z), \quad \gamma_1, \gamma_2 \to \gamma_1\gamma_2,$$

той же формулой, которая приводится в задаче 8.29. Докажите, что это отображение непрерывно и переводит гомотопные пути в гомотопные.

Задача 8.35[!]**.** Пусть $x, y \in M$, а $\gamma_{xy}\colon [0, 1] \to M$ — путь, соединяющий x и y. Определим γ_{xy}^{-1} формулой $\gamma_{xy}^{-1}(\lambda) = \gamma_{xy}(1-\lambda)$. Рассмотрим отображения

$$\Omega(M, x) \to \Omega(M, y), \quad \gamma \to \gamma_{xy}^{-1}\gamma\gamma_{xy}$$

и

$$\Omega(M, y) \to \Omega(M, x), \quad \gamma \to \gamma_{xy}\gamma\gamma_{xy}^{-1}.$$

Докажите, что эти отображения переводят гомотопные пути в гомотопные. Пусть f, g — соответствующие отображения на фундаментальных группах. Докажите, что f и g взаимно обратны и индуцируют изоморфизм групп $\varphi_{\gamma_{xy}}: \pi_1(M, x) \to \pi_1(M, y)$.

Замечание. Как видно из следующей задачи, если группа $\pi_1(M)$ неабелева, то полученный изоморфизм $\pi_1(M, x) \cong \pi_1(M, y)$ нетривиально зависит от выбора пути γ_{xy}. Тем не менее, когда зависимость от отмеченной точки неважна, фундаментальную группу M обозначают просто $\pi_1(M)$. Это обозначение не вполне корректно.

Задача 8.36!. В условиях предыдущей задачи пусть $x = y$, а γ_{xx} — некоторый путь. Докажите, что полученный выше изоморфизм

$$\varphi_{\gamma_{xx}}: \pi_1(M, x) \to \pi_1(M, x)$$

выражается через γ_{xx} так: $\gamma \to \gamma_{xx}\gamma\gamma_{xx}^{-1}$.

8.5. Односвязные пространства

Определение 8.13. Пусть M — линейно связное топологическое пространство. Говорят, что M *односвязно*, если все петли на M стягиваемы, т. е. если $\pi_1(M) = \{1\}$.

Задача 8.37. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ односвязно.

Определение 8.14. Пусть (M, x) — топологическое пространство с отмеченной точкой, $\varphi: M \times [0, 1] \to M$ — такое непрерывное отображение, что $\varphi(M \times \{1\}) = \{x\}$, а $\varphi|_{M\times\{0\}}$ задает тождественное отображение из $M = M \times \{0\}$ в M. Тогда (M, x) называется *стягиваемым*. В такой ситуации говорится, что φ *задает гомотопию между тождественным отображением и проекцией* $M \to \{x\}$.

Задача 8.38!. Пусть (M, x) линейно связно и стягиваемо. Докажите, что для любой точки $y \in M$ пространство (M, y) стягиваемо.

Указание. Пусть $\varphi: M \times [0, 1] \to M$ — гомотопия между тождественным отображением и проекцией в $\{x\}$, а $\gamma: [0, 1] \to M$ — путь, соединяющий x и y. Возьмите отображение $\varphi_1: M \times [0, 1] \to M$, переводящее (m, t) в $\varphi(m, 2t)$ для $t \in [0, 1/2]$ и в $\gamma(2t - 1)$ для $t \in [1/2, 1]$.

Задача 8.39. Докажите, что стягиваемое топологическое пространство линейно связно.

Замечание. Из двух вышеприведенных задач ясно, что стягиваемость (M, x) не зависит от выбора x. В дальнейшем мы будем говорить просто «M стягиваемо».

Задача 8.40. Докажите, что стягиваемое пространство односвязно.

Задача 8.41[!]. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — *звездчатое подмножество* пространства $(\mathbb{R}^n, x)$, т. е. такое подможество, что любая прямая, проходящая через $x \in \mathbb{R}^n$, пересекается с V по связному множеству, а $x \in V$. Докажите, что V стягиваемо.

Задача 8.42. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое подмножество. Докажите, что оно стягиваемо.

Определение 8.15. Пусть $N \subset M$ — топологическое пространство и его подмножество. *Деформационной ретракцией* M к N называется такое непрерывное отображение $\varphi\colon M \times [0,1] \to M$, что $\varphi(M \times \{1\}) \subset N$, причем ограничение этого отображения на N тождественное, а $\varphi|_{M \times \{0\}}$ задает тождественное отображение. В этом случае N называется *деформационным ретрактом* M.

Задача 8.43[!]. Пусть $N \subset M$ — деформационный ретракт, $n \in N$ — точка в N. Докажите, что естественное отображение $\pi_1(N, n) \to$ $\to \pi_1(M, n)$ — изоморфизм.

Определение 8.16. Пусть M — топологическое пространство, а $\sim$ — отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается, как всегда, через $M/\sim$. На $M/\sim$ вводится *топология фактора*: открытые подмножества пространства $M/\sim$ — это такие подмножества, прообраз которых в M открыт. В частности, если на M действует группа G, то возникает естественное отношение эквивалентности: $x \sim y$, если существует такое $g \in G$, что $g \cdot x =$ $= y$. Фактор пространства M по этому отношению эквивалентности называется *факторпространством M по действию группы G* и обозначается M/G. Классы эквивалентности называются *G-орбитами* в M.

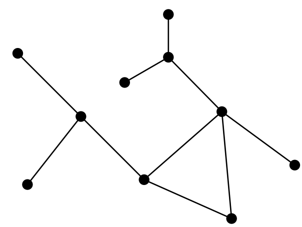
Задача 8.44. Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство, а $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ и $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset M$ — два непересекающихся конечных подмножества. Докажите, что у подмножеств $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$ найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 8.45[!]. Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство, а G — конечная группа, которая действует на M гомеоморфизмами. Рассмотрим факторпространство M/G с топологией фактора. Докажите, что M/G хаусдорфово.

Указание. Пусть x, y — две точки, не принадлежащие одной и той же G-орбите. Найдите у точек x, y непересекающиеся G-инвариантные окрестности. Для этого примените задачу 8.44 к орбитам Gx, Gy, получите окрестности U, U' и возьмите $\bigcap_{g\in G} gU$, $\bigcap_{g\in G} gU'$.

Задача 8.46*. Приведите пример, когда M хаусдорфово, а M/G нехаусдорфово (и группа, соответственно, бесконечна).

Определение 8.17. Пусть Γ — некоторый граф, т. е. набор данных вида «множество вершин» V, «множество ребер» R и сведений о том, какие вершины являются концами каких ребер.



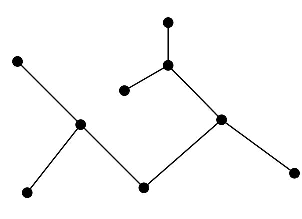
Более строго Γ можно определить как некоторое подмножество R в множестве двухэлементных подмножеств множества вершин V. Определите самостоятельно понятие *топологическое пространство графа* (неформально: вершины — точки, ребра — соединяющие их отрезки).

Задача 8.47. Докажите, что топологическое пространство любого графа хаусдорфово.

Задача 8.48. Граф называется *связным*, если любая вершина соединена с любой другой конечной цепочкой ребер. Докажите, что топологическое пространство связного графа линейно связно.

Задача 8.49.** Пусть дан граф с бесконечным множеством вершин. Докажите, что в графе найдется либо бесконечное подмножество вершин, попарно соединенных ребрами, либо бесконечное подмножество вершин, попарно не соединенных.

Задача 8.50!. Пусть Γ — связный граф, у которого n вершин и $n-1$ ребро (такой граф называется *деревом*).



Докажите, что его топологическое пространство M_γ стягиваемо.

Задача 8.51*. Пусть Γ — такой бесконечный связный граф, что любой его связный конечный подграф — дерево. Докажите, что $\pi_1(M_\gamma)=\{1\}$.

8.6. Накрытия

Определение 8.18. Пусть $\widetilde{M}\xrightarrow{\pi}M$ — непрерывное отображение топологических пространств. Отображение π называется *накрытием*, если у каждой точки есть такая окрестность U, что $\pi^{-1}(U)$ изоморфно произведению U и дискретного топологического пространства K, причем стандартное отображение $\pi^{-1}(U)\xrightarrow{\pi}U$ совпадает с естественной проекцией $\pi^{-1}(U)=U\times K\to U$. В этом случае также говорится, что $\widetilde{M}$ *накрывает* M.

Мы рассматриваем окружность S^1 как факторпространство $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Это задает естественную групповую структуру на S^1.

Задача 8.52. Пусть n — ненулевое целое число. Рассмотрим естественное отображение $S^1\to S^1$, $t\to nt$. Докажите, что это накрытие.

Задача 8.53. Докажите, что естественная проекция $\mathbb{R}\to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — накрытие.

Задача 8.54. Докажите, что естественная проекция $\mathbb{R}^n\to(S^1)^n$ — это накрытие.

Задача 8.55. Рассмотрим фактор $S^n\to S^n/\{\pm1\}=\mathbb{R}P^n$ сферы по центральной симметрии с естественной топологией (открытые множества — это множества, прообраз которых открыт). Докажите, что это накрытие.

Задача 8.56. Пусть $\widetilde{M}\xrightarrow{\pi}M$ — накрытие, а $\widetilde{M}'\subset\widetilde{M}$ — подпространство, которое тоже накрывает M. Докажите, что $\widetilde{M}'$ открыто и замкнуто в $\widetilde{M}$.

Задача 8.57. Пусть $\widetilde{M}\xrightarrow{\pi}M$ — накрытие, а M локально линейно связно. Докажите, что $\widetilde{M}$ локально линейно связно. Докажите, что любая компонента линейной связности в $\widetilde{M}$ накрывает M.

Задача 8.58!. Пусть $\widetilde{M}\xrightarrow{\pi}M$ — накрытие, а M локально линейно связно. Докажите, что $\widetilde{M}$ связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

Определение 8.19. Пусть $\gamma\colon[a,b]\to M$ — некоторый путь, а $\widetilde{M}\xrightarrow{\pi}M$ — накрытие. Отображение $\tilde\gamma\colon[a,b]\to\widetilde{M}$ называется *поднятием* γ, если $\tilde\gamma\circ\pi=\gamma$.

Задача 8.59[!]. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — накрытие, а $\gamma\colon [a,b] \to M$ — путь, соединяющий x и y. Докажите, что для каждого $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$ существует и единственно поднятие $\tilde{\gamma}$, переводящее a в $\tilde{x}$.

Задача 8.60[!]. Докажите, что гомотопные пути поднимаются до гомотопных путей, а $\tilde{\gamma}(y) \in \pi^{-1}(\{y\})$ однозначно определяется классом гомотопии γ в $\Omega(M, x, y)$ и точкой $\tilde{x}$.

Замечание. Обозначим через $\pi_1(M, x, y)$ множество классов гомотопии путей из x в y. Мы получили отображение

$$\Psi\colon \pi^{-1}(\{x\}) \times \pi_1(M, x, y) \to \pi^{-1}(\{y\}).$$

Определение 8.20. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — накрытие, а M линейно связно. Пространство $\widetilde{M}$ называется *универсальным накрытием*, если оно связно и односвязно.

Замечание. Односвязность была определена только для линейно связных пространств. Но это ничему не мешает, поскольку из задачи 8.58 следует, что $\widetilde{M}$ линейно связно.

Задача 8.61[!]. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — универсальное накрытие. Зафиксируем точки $x \in M$ и $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$. Рассмотрим отображение $\psi\colon \pi_1(M, x) \to \pi^{-1}(\{x\})$, построенное в задаче 8.60, $\psi(\gamma) = \Psi(\tilde{x}, \gamma)$. Докажите, что это биекция.

Задача 8.62. Докажите, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Задача 8.63. Докажите, что $\pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$.

Задача 8.64*. Докажите, что при $n > 1$ выполняется равенство $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 8.65. Найдите фундаментальные группы всех связных букв русского алфавита, кроме «Ф» и «В» (точнее, графов, смоделированных на этих буквах).

Задача 8.66*. Дан конечный связный граф, у которого n ребер и n вершин. Пусть M — его топологическое пространство. Докажите, что $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$.

Листок 9

НАКРЫТИЯ ГАЛУА

Наука о накрытиях Галуа весьма похожа на теорию Галуа алгебраических расширений полей. Это не случайно. В алгебраической геометрии методы топологии и дифференциальной геометрии применяются к объектам алгебраической и теоретико-числовой природы. А. Гротендик определил фундаментальную группу алгебраического многообразия таким образом, что группа Галуа и фундаментальная группа топологического пространства оказались частными случаями более общей конструкции. При изучении накрытий и расширений полей, а также фундаментальной группы и группы Галуа очень полезно держать в голове, что это похожие вещи.

Все топологические пространства в этом листке предполагаются хаусдорфовыми и локально связными[1].

Задача 9.1. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — накрытие, а M_1 — связная компонента в $\widetilde{M}$. Докажите, что $\pi(M_1)$ — связная компонента в M.

Задача 9.2!. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — накрытие, причем $\widetilde{M}$ и M связны и непусты, а π инъективно. Докажите, что π — гомеоморфизм.

Определение 9.1. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$, $\widetilde{M}' \xrightarrow{\pi'} M$ — накрытия. *Морфизмом накрытий* называется непрерывное отображение $\varphi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}'$, согласованное с проекцией в M, т. е., иначе говоря, удовлетворяющее условию $\varphi \circ \pi' = \pi$. Множество морфизмов между накрытиями обозначается $\mathscr{M}or(\widetilde{M}, \widetilde{M}')$. *Изоморфизмом накрытий* называется морфизм, который обратим.

Задача 9.3!. Пусть $\varphi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}'$ — морфизм накрытий. Докажите, что $\varphi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}'$ — накрытие.

Задача 9.4. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — непрерывное отображение.

а) Пусть π — накрытие. Докажите, что у каждой точки $x \in \widetilde{M}$ есть такая окрестность U, что проекция $\pi\colon U \to \pi(U)$ — гомеоморфизм.

б!) Пусть у каждой точки $x \in \widetilde{M}$ есть такая окрестность U, что проекция $\pi\colon U \to \pi(U)$ — гомеоморфизм. Всегда ли π — накрытие?

Задача 9.5. Пусть M локально связно, а $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — накрытие. Докажите, что $\widetilde{M}$ локально связно.

---

1 Всюду в этом листке термин «связность» стоит понимать как «линейная связность», а все пространства считать локально односвязными. — *Прим. ред.*

Задача 9.6. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$, $\widetilde{M}' \xrightarrow{\pi'} M$ — накрытия, а $\widetilde{M}' \sqcup \widetilde{M}$ — их несвязная сумма. Докажите, что это тоже накрытие пространства M.

Задача 9.7. Пусть M связно, а $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — накрытие. Докажите, что $\widetilde{M} \cong \bigsqcup_{\alpha\in I} \widetilde{M}_\alpha$, где $\{\widetilde{M}_\alpha\}$ — множество компонент связности $\widetilde{M}$, рассмотренных как накрытия M.

Определение 9.2. *Расщеплением* накрытия $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ называется изоморфизм $\widetilde{M}$ и накрытия вида $\widetilde{M} \cong V \times M$, где V — множество с дискретной топологией.

Задача 9.8. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — накрытие связного пространства M. Докажите, что π расщепляется тогда и только тогда, когда все связные компоненты $\widetilde{M}$ изоморфны M как накрытия над $\widetilde{M}$.

9.1. Накрытия Галуа

Задача 9.9!. Пусть $M_1 \xrightarrow{\pi_1} M$, $M_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ — накрытия. Рассмотрим следующее подмножество в $M_1 \times M_2$:

$$M_1 \times_M M_2 := \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 \colon\ \pi_1(m_1) = \pi_2(m_2)\}.$$

Мы рассматриваем $M_1 \times_M M_2$ как топологическое пространство (с топологией, индуцированной с $M_1 \times M_2$). Докажите, что естественное отображение $M_1 \times_M M_2 \to M$ — это накрытие.

Определение 9.3. Пространство $M_1 \times_M M_2$ вместе с естественным отображением в M называется *произведением накрытий* M_1, M_2. Аналогичным образом определяется произведение любого конечного числа накрытий.

Замечание. Если пользоваться аналогией между расширениями полей и накрытиями, то несвязные объединения накрытий соответствуют прямому произведению полупростых артиновых колец, а произведения — тензорным произведениям.

Задача 9.10. Пусть M_1, M_2, M_3 — накрытия пространства M. Докажите, что морфизмы из M_3 в $M_1 \times_M M_2$ взаимно однозначно соответствуют парам морфизмов $\varphi_1 \colon M_3 \to M_1$, $\varphi_2 \colon M_2 \to M_1$.

Задача 9.11. Рассмотрим $\mathbb{R}$ как накрытие S^1. Сколько связных компонент у $\mathbb{R} \times_{S^1} \mathbb{R}$?

Определение 9.4. Пусть $\varphi \colon M_1 \to M_2$ — морфизм между двумя накрытиями пространства M. Определим *график морфизма* φ как подмножество в $M_1 \times_M M_2$, состоящее из пар вида $(m, \varphi(m))$ для всех $m \in M_1$.

Задача 9.12$^!$. Пусть $\varphi\colon M_1\to M_2$ — морфизм между двумя накрытиями M, а Γ_φ — его график. Докажите, что Γ_φ открыто и замкнуто в $M_1\times_M M_2$.

В развитие аналогии с теорией Галуа, накрытия вида $\widetilde{M}\xrightarrow{\pi} M$ будут в дальнейшем обозначаться $[\widetilde{M}:M]$.

Задача 9.13. Пусть $[\widetilde{M}:M]$ — накрытие, причем M и $\widetilde{M}$ связны (такое накрытие называется *связным*). Пусть $X\subset\widetilde{M}\times_M\widetilde{M}$ — связная компонента. Докажите, что X является графиком автоморфизма $\nu\colon\widetilde{M}\to\widetilde{M}$ тогда и только тогда, когда проекция на первую компоненту задает изоморфизм $X\cong\widetilde{M}$.

Задача 9.14$^!$. Пусть $[\widetilde{M}:M]$ — связное накрытие. Рассмотрим проекцию (по первому аргументу) $\widetilde{M}\times_M\widetilde{M}\to\widetilde{M}$ как накрытие пространства $\widetilde{M}$. Постройте взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{M}or_{\widetilde{M}}(\widetilde{M},\widetilde{M}\times_M\widetilde{M})$ и множеством автоморфизмов $\widetilde{M}$ над M.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 9.5. Пусть $[\widetilde{M}:M]$ — накрытие, причем M и $\widetilde{M}$ связны. Тогда $[\widetilde{M}:M]$ называется *накрытием Галуа*, если накрытие $\widetilde{M}\times_M\widetilde{M}\to\widetilde{M}$ расщепляется. В такой ситуации группа автоморфизмов $\widetilde{M}$ над M называется *группой Галуа накрытия* $[\widetilde{M}:M]$ и обозначается $\operatorname{Gal}([\widetilde{M}:M])$. Иногда группа Галуа накрытия называется *группой монодромии*, а по-английски — *deck transformation group* (группа перелистывания колоды).

Задача 9.15$^!$. Пусть M связно, а $[\widetilde{M}:M]$ — такое накрытие Галуа, что у каждой точки M есть ровно n прообразов (такое накрытие называется n-листным). Докажите, что у группы Галуа $[\widetilde{M}:M]$ ровно n элементов.

Указание. Докажите, что накрытие $[\widetilde{M}\times_M\widetilde{M}:\widetilde{M}]$ тоже n-листное, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 9.6. Пусть группа G действует на множестве S. Действие называется *свободным*, если для любых $g\in G$, $g\neq 1$, $s\in S$ выполняется условие $s\neq gs$. Действие называется *транзитивным*, если для любых двух s_1, $s_2\in S$ найдется такой $g\in G$, что $g(s_1)=s_2$.

Задача 9.16. Пусть $\widetilde{M}\xrightarrow{\pi} M$ — накрытие, а $G=\operatorname{Aut}_M(\widetilde{M})$ — его группа автоморфизмов. Предположим, что M связно. Докажите, что для любого $x\in M$ группа G действует свободно на $\pi^{-1}(x)$.

Задача 9.17$^!$. Пусть $\widetilde{M}\xrightarrow{\pi} M$ — накрытие Галуа, а $x\in M$ — любая точка. Докажите, что $\operatorname{Gal}([\widetilde{M}:M])$ действует на $\pi^{-1}(x)$ свободно и транзитивно.

Указание. Установите взаимно однозначное соответствие между $\pi^{-1}(X)$ и множеством связных компонент пространства $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$ и примените задачу 9.14.

Задача 9.18!**.** Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — накрытие, а $x \in M$ — любая точка. Докажите, что $\mathrm{Aut}_M(\widetilde{M})$ транзитивно действует на $\pi^{-1}(x)$ тогда и только тогда, когда $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие Галуа.

Задача 9.19. Рассмотрим накрытие $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong (S^1)^n$. Докажите, что это накрытие Галуа.

Задача 9.20. Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим n-листное накрытие $S^1 \to S^1$, $t \to nt$. Докажите, что это накрытие Галуа.

Определение 9.7. Пусть M — топологическое пространство, а G — группа, действующая на M непрерывными преобразованиями. Рассмотрим пространство G-орбит M/G. Напомним (см. листок 10), что на M/G следующим образом вводится топология: подмножество M/G открыто тогда и только тогда, когда его прообраз в M открыт. Множество M/G с этой топологией называется *факторпространством M* по действию G.

Задача 9.21!**.** Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие, а $G \subset \mathrm{Aut}_M(\widetilde{M})$ действует на $[\widetilde{M} : M]$ автоморфизмами. Докажите, что это действие свободно, а факторпространство $\widetilde{M}/G$ хаусдорфово и накрывает M.

Замечание. Фактор по G играет в теории накрытий Галуа ту же роль, что G-инварианты в теории расширений Галуа.

Задача 9.22!**.** Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие, а G — его группа автоморфизмов. Докажите, что $\widetilde{M}/G$ изоморфно M тогда и только тогда, когда $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие Галуа.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.18.

Задача 9.23. Пусть $M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3$ — последовательность накрытий, причем φ_i сюръективны, а их композиция расщепляется. Докажите, что φ_i расщепляются.

Задача 9.24!**.** Пусть $M_1 \to M_2 \to M_3$ — последовательность накрытий, причем все M_i связны, а $[M_1 : M_3]$ — накрытие Галуа. Докажите, что $M_1 \times_{M_3} M_2$ расщепляется как накрытие над M_1.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.23, применив ее к последовательности $M_1 \times_{M_3} M_1 \to M_1 \times_{M_3} M_2 \to M_1 \times_{M_3} M_3$.

Задача 9.25!**.** Пусть $M_1 \to M_2 \to M_3$ — последовательность накрытий, причем $[M_1 : M_3]$ — накрытие Галуа. Докажите, что $[M_1 : M_2]$ — накрытие Галуа.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.23.

Задача 9.26. Пусть $[\widetilde{M}:M]$ — накрытие, G — его группа Галуа, а $G'\subset G$ — ее подгруппа. Рассмотрим фактор $\widetilde{M}/G'$. Докажите, что $[\widetilde{M}:\widetilde{M}/G']$ — накрытие Галуа с группой Галуа G'.

Определение 9.8. Пусть $\widetilde{M}\to M$ — накрытие. *Факторнакрытием* $[\widetilde{M}:M]$ называется накрытие $\widetilde{M}'\to M$, заданное вместе с последовательностью накрытий $\widetilde{M}\to\widetilde{M}'\to M$, где $\widetilde{M}\to\widetilde{M}'$ сюръективно.

Задача 9.27[!] (основная теорема теории Галуа)**.** Пусть $[\widetilde{M}:M]$ — накрытие Галуа с группой Галуа G. Рассмотрим соответствие, сопоставляющее подгруппе $G'\subset G$ факторнакрытие $[\widetilde{M}/G':M]$. Докажите, что это соответствие устанавливает биекцию между множеством подгрупп и множеством классов изоморфизма факторнакрытий.

Задача 9.28. Пусть $M_1\to M_2\to M_3$ — последовательность накрытий, причем $[M_1:M_3]$ — накрытие Галуа. Рассмотрим естественную проекцию
$$\Psi\colon\ M_1\times_{M_3}M_1\to M_2\times_{M_3}M_2.$$
Пусть $g\in\operatorname{Gal}([M_1:M_3])$, а $e_g\subset M_1\times_{M_3}M_1$ — компонента связности точки $\{(m,g(m))\}$ в $M_1\times_{M_3}M_1$. Докажите, что
$$g\in\operatorname{Gal}([M_1:M_2])\subset\operatorname{Gal}([M_1:M_3])$$
тогда и только тогда, когда при проекции в $M_2\times_{M_3}M_2$ компонента e_g переходит в диагональную компоненту.

Задача 9.29. Пусть $M_1\to M_2\to M_3$ — последовательность накрытий Галуа. Докажите, что естественная проекция
$$\Psi\colon\ M_1\times_{M_3}M_1\to M_2\times_{M_3}M_2$$
задает сюръективный гомоморфизм $\operatorname{Gal}([M_1:M_3])\xrightarrow{\psi}\operatorname{Gal}([M_2:M_3])$. Докажите, что $\ker\psi=\operatorname{Gal}([M_1:M_2])$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что группа Галуа $\operatorname{Gal}([M_i:M_3])$ отождествляется с множеством связных компонент $M_i\times_{M_3}M_i$, и примените предыдущую задачу.

Задача 9.30[!]**.** Пусть $\widetilde{M}\to M$ — накрытие Галуа, а $G'\to\widetilde{M}/G'$ — биективное соответствие между факторнакрытиями и подгруппами в группе Галуа, построенное выше. Докажите, что G' является нормальной подгруппой тогда и только тогда, когда $[\widetilde{M}/G':M]$ — накрытие Галуа.

9.2. Накрытия линейно связных пространств

Определение 9.9. Пусть M — метрическое пространство. Напомним, что *геодезической* в M называется такой путь $\gamma\colon [a,b] \to M$, что $d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x-y|$. *Длина* геодезической — это расстояние между ее концами. Путь называется *кусочно геодезическим*, если его можно разбить в объединение конечного числа геодезических сегментов. *Длина* кусочно геодезического пути определяется как сумма длин составляющих этот путь геодезических отрезков. Мы обозначаем длину пути γ через $|\gamma|$.

Задача 9.31$^!$. Пусть Γ — связный граф (см. задачу 8.48). По построению на каждом ребре $r_\alpha \subset M_\gamma$ графа введены координаты, отождествляющие его с $[0,1]$. Пусть γ — кусочно линейный путь в Γ_M, т. е. путь, составленный из конечного числа отрезков вида $\varphi_i\colon [a_i, b_i] \to [\lambda_i, \mu_i] \subset r_\alpha$, где функция φ_i линейна. Определим $|\gamma| := = \sum |\lambda_i, \mu_i|$ как сумму длин всех отрезков, составляющих этот путь. Определим $d(x,y) := \inf |\gamma|$, где γ пробегает все кусочно линейные пути, ведущие из x в y. Докажите, что $d(x,y)$ задает метрику и M_γ геодезически связно.

Определение 9.10. Эта метрика называется *стандартной метрикой на топологическом пространстве графа*.

Определение 9.11. Геодезически связное многообразие M называется *звездчатым*, если любые две его точки соединяются единственной геодезической.

Задача 9.32. Докажите, что любое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$ (со стандартной метрикой) звездчатое.

Задача 9.33*. Найдите на $M = \mathbb{R}^2$ такую метрику, что M геодезически связно, а из любой точки в любую идет бесконечно много геодезических.

Задача 9.34*. Пусть Γ — дерево, т. е. конечный связный граф, у которого n вершин и $n-1$ ребро. Докажите, что многообразие M_γ со стандартной метрикой звездчатое.

Задача 9.35*. Пусть Γ — такой конечный граф, что Γ_M звездчатое. Докажите, что Γ — дерево.

Задача 9.36$^!$. Пусть M — локально компактное геодезически связное пространство, $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — связное накрытие, а x и y — две точки в $\widetilde{M}$. Рассмотрим множество $S_{x,y}$ всех путей на $\widetilde{M}$, соединяющих x и y, проекция которых в M кусочно геодезична. Рассмотрим следующую функцию на $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$: $\tilde{d}(x, y) = \inf\limits_{\gamma \in S_{x,y}} |\pi(\gamma)|$. Докажите, что это метрика. Докажите, что $\tilde{d}(x, y) \geqslant d(\pi(x), \pi(y))$.

Задача 9.37*. В условиях предыдущей задачи докажите, что $\widetilde{M}$ геодезически связно.

Задача 9.38. Пусть M — геодезически связное метрическое пространство, а $\widetilde{M} \to M$ — его накрытие. Докажите, что связная компонента прообраза геодезической — геодезическая в $(\widetilde{M}, \tilde{d})$.

Указание. Докажите, что прообраз геодезической является геодезической в окрестности каждой точки. Затем воспользуйтесь неравенством $\tilde{d}(x, y) \geqslant d(\pi(x), \pi(y))$.

Задача 9.39!. Пусть (M, d) — звездчатое метрическое пространство, а $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — его связное накрытие. Пусть, кроме того, $x \in \widetilde{M}$ — любая точка, а U_x — множество точек $y \in M$, которые можно соединить с x геодезической. Докажите, что U_x открыто и замкнуто в $\widetilde{M}$ и что $(U_x, \tilde{d})$ звездчатое. Выведите из этого, что естественная проекция $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — изометрия и гомеоморфизм.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.40. Пусть $M = [0, 1] \times [0, 1]$ — квадрат, а $\widetilde{M} \to M$ — его связное накрытие. Докажите, что это гомеоморфизм.

Задача 9.41. Пусть M — линейно связное и односвязное пространство, а $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — связное накрытие. Докажите, что это гомеоморфизм.

Указание. Сначала докажите, что $\widetilde{M}$ линейно связно. Пусть $x, y \in \pi^{-1}(x_0)$ — две точки, а $\tilde{\gamma}$ — путь, который их соединяет. Тогда $\gamma := \pi(\tilde{\gamma})$ — это петля. Поскольку M односвязно, γ продолжается до отображения из квадрата в $X \subset M$ (докажите это). Рассмотрим прообраз этого квадрата в $\widetilde{M}$, и пусть $\widetilde{X}$ — компонента прообраза, которая содержит $\tilde{\gamma}$. Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что $\widetilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ — гомеоморфизм, и выведите из этого, что $x = y$.

Задача 9.42. В условиях предыдущей задачи докажите, что любое накрытие M расщепляется.

Определение 9.12. Пусть M — любое (не обязательно линейно связное) связное топологическое пространство. Пространство M называется *односвязным*, если любое его накрытие расщепляется.

Замечание. В силу предыдущей задачи это определение согласовано с определением односвязности для линейно связных топологических пространств, данным в листке 8.

Определение 9.13. Пусть M связно. Накрытие $\widetilde{M} \to M$ называется *универсальным*, если оно односвязно.

Задача 9.43[!]. а) Докажите, что универсальное накрытие есть накрытие Галуа.

б) Докажите, что универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма.

Указание. Пусть $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}'$ — два универсальных накрытия пространства M. Поскольку $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}'$ является накрытием пространств $\widetilde{M}, \widetilde{M}'$, оно расщепляется над $\widetilde{M}, \widetilde{M}'$. Это значит, что любая связная компонента $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}'$ изоморфно проектируется в $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}'$.

Задача 9.44. Пусть $M_1 \to M_2$ и $M_2 \to M_3$ — накрытия.

а**) Верно ли, что композиция $M_1 \to M_3$ — тоже накрытие?

б[!]) Пусть у каждой точки M_3 есть односвязная окрестность. Докажите, что $M_1 \to M_3$ — накрытие.

9.3. Существование универсального накрытия

Задача 9.45. Пусть M линейно связно, $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — связное накрытие, а $x \in M$ — любая точка. Докажите, что мощность множества $\pi^{-1}(x)$ не больше, чем мощность $\pi_1(M)$.

Задача 9.46. Докажите, что мощность $\pi^{-1}(x)$ не больше, чем мощность множества $M^{[0,1]}$ отображений из $[0, 1]$ в M.

Задача 9.47*. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — связное накрытие связного пространства M, $x \in M$ — любая точка, а S — база топологии в M. Докажите, что мощность $\pi^{-1}(x)$ не больше чем $|2^{2S}|$, где $|2^{2S}|$ — мощность множества подмножеств произведения $S \times S$.

Указание. Выберем $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(x)$. Докажите, что найдется набор таких связных открытых множеств $\{\widetilde{U}_\alpha\} \in \pi^{-1}(S)$, что $\widetilde{U}_{\alpha_0}$ пересекается с объединением всех $\widetilde{U}_\alpha$, не равных U_{α_0}, причем

$$\{x_1, x_2\} = \pi^{-1}(x) \cap \Big(\bigcup \widetilde{U}_\alpha\Big).$$

Сужая, если необходимо, базу S, можно предположить, что π расщепляется над $\pi(U_\alpha)$ для всех α. Докажите, что x_2 задается однозначно, если задано x_1, $\{\pi(U_\alpha)\}$ и отмечено, какие из U_α пересекаются.

Задача 9.48. Пусть M связно, а V — множество заданной ниже мощности. Обозначим через $\mathscr{R}$ множество всех топологий, заданных на каком-то подмножестве $X \subset M \times V$ таким образом, что естественная проекция $X \to M$ является накрытием. Докажите, что любое связное накрытие M изоморфно какому-то элементу множества $\mathscr{R}$, если

а) M линейно связно, а мощность V равна $|M^{[0,1]}|$;

б*) мощность V равна $|2^{2^S}|$, где S — база топологии в M.

Замечание. Эта задача позволяет говорить о «множестве классов изоморфизма накрытий». Напомним, что не все математические объекты являются множествами; так, множеством не является класс всех множеств. Чтобы доказать, что какой-то класс является множеством, надо ограничить его мощность.

Определение 9.14. Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ — набор отображений на M, проиндексированный набором индексов I (возможно, бесконечным или даже несчетным). Рассмотрим множество всех таких $(m_{\alpha_1}, m_{\alpha_1}, \ldots) \in \prod M_\alpha$, что $\pi_\alpha(m_\alpha) = m$ для какого-то $m \in M$. Это множество называется *расслоенным произведением набора* $\{M_\alpha\}$ и обозначается $\prod_M M_\alpha$.

Задача 9.49. Пусть M — топологическое пространство, а $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ — набор его накрытий. Введем на $\prod_M M_\alpha$ топологию следующим образом. Пусть $U \subset M$ открыто, а $\{U_\alpha \subset M_\alpha\}$ — набор открытых множеств, накрывающих U. Докажите, что множества вида $\prod_\alpha U_\alpha \subset \prod_M M_\alpha$ задают базу топологии на $\prod_M M_\alpha$. Докажите, что пространство $\prod_M M_\alpha$ хаусдорфово.

а*) Верно ли, что естественная проекция $\prod_M M_\alpha \to M$ — накрытие?

б!) Предположим, что у каждой точки M найдется односвязная окрестность. Докажите, что естественная проекция $\prod_M M_\alpha \to M$ — накрытие.

Определение 9.15. В такой ситуации $\prod_M M_\alpha$ называется *расслоенным произведением M_α над M* либо просто произведением накрытий $M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M$.

Задача 9.50. Пусть все накрытия $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ расщепляются. Докажите, что $\prod_M M_\alpha$ тоже расщепляется.

Задача 9.51!. Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ — накрытия Галуа. Докажите, что любая компонента связности их произведения над M — тоже накрытие Галуа.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.50.

Задача 9.52. Пусть $\widetilde{M}$ — накрытие M. Постройте естественную биекцию между множествами $\mathscr{M}or\left(\prod_M M_\alpha, \widetilde{M}\right)$ и $\prod \mathscr{M}or(M_\alpha, \widetilde{M})$.

Задача 9.53*. Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ — множество всех накрытий $S^1 \to S^1$, $t \to nt$, проиндексированных целыми числами. Докажите, что любая связная компонента $\prod_M M_\alpha$ изоморфна $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$.

Задача 9.54. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — накрытие, причем $\widetilde{M}$ и M связные, $x \in M$, $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(x)$, W — компонента связности пространства $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$, содержащая $x_1 \times x_2$, а W_1 — компонента связности пространства $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$, содержащая $x_1 \times x_2 \times x_2$. Докажите, что естественная проекция $W_1 \to W$ (забывание третьего аргумента) — это изоморфизм.

Задача 9.55. В такой же ситуации пусть $\{x_\alpha\}$ — набор точек в $\pi^{-1}(x)$, проиндексированных $\alpha \in I$, W — соответствующая компонента в $\prod_{M,I} \widetilde{M}$ — расслоенном произведении I копий $\widetilde{M}$, а W_1 — компонента в $\left(\prod_{M,I} \widetilde{M}\right) \times_M \widetilde{M}$, содержащая $\{x_\alpha\}$ и x_0, причем $x_0 \in \in \{x_\alpha\}$. Докажите, что естественная проекция $W_1 \to W$ — это изоморфизм.

Задача 9.56[!]. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — связное накрытие, а $x \in M$. Рассмотрим $\prod_{M,\{\pi^{-1}(x)\}} \widetilde{M}$ — произведение $\widetilde{M}$ с собой, проиндексированное множеством $\pi^{-1}(x)$, и пусть $\widetilde{M}_G$ — связная компонента в $\prod_{M,\{\pi^{-1}(x)\}} \widetilde{M}$, содержащая произведение всех $x_\alpha \in \{\pi^{-1}(x)\}$. Докажите, что $\widetilde{M}_G \times_M \widetilde{M}$ расщепляется над $\widetilde{M}_G$. Докажите, что $\widetilde{M}_G \to M$ — накрытие Галуа.

Замечание. Мы доказали, что любое накрытие является фактор-накрытием накрытия Галуа.

Задача 9.57. Пусть M — связное топологическое пространство, $\mathscr{R}$ — множество всех классов изоморфизма связных накрытий M, $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ — соответствующий набор накрытий, а $\widetilde{M} \subset \prod_M M_\alpha$ — компонента связности их произведения. Докажите, что для каждого связного накрытия $\widetilde{M}' \to \widetilde{M}$ найдется сюръективный морфизм накрытий $\widetilde{M} \to \widetilde{M}'$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.58. В условиях предыдущей задачи докажите, что $\widetilde{M}$ — накрытие Галуа.

Задача 9.59[!]. Выведите из этого, что для любого накрытия $\widetilde{M} \to \to M$ накрытие $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}' \to \widetilde{M}$ расщепляется.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.24.

Задача 9.60[!]. Пусть M — произвольное связное топологическое пространство, а $\widetilde{M} \to M$ — накрытие Галуа, построенное выше. Докажите, что $\widetilde{M}$ односвязно.

Замечание. Мы получили, что у любого связного топологического пространства найдется универсальное накрытие. Как было доказано выше, универсальное накрытие единственно.

Задача 9.61!. Пусть M линейно связно, $\widetilde{M}$ — его универсальное накрытие, а $\mathrm{Gal}([\widetilde{M}:M])$ — соответствующая группа Галуа. Докажите, что $\mathrm{Gal}([\widetilde{M}:M])$ изоморфна фундаментальной группе пространства M.

Определение 9.16. Подгруппы $G_1, G_2 \subset G$ называются *сопряженными*, если найдется такой $g \in G$, что G_1 переводится в G_2 автоморфизмом $x \to x^g = gxg^{-1}$.

Задача 9.62*. Пусть $M_1 \to M$ — некоторое накрытие, а $\widetilde{M} \to \to M_1 \to M$ — универсальное накрытие. Рассмотрим подгруппу $G_1 \subset \subset \mathrm{Gal}([\widetilde{M} : M]) = \pi_1(M)$, полученную в результате применения основной теоремы теории Галуа. Докажите, что это соответствие задает биекцию между классами изоморфизма связных накрытий пространства M и классами сопряженности подгрупп в $\pi_1(M)$.

Задача 9.63!. Найдите все накрытия окружности с точностью до изоморфизма. Постройте их явно.

Задача 9.64*. Пусть M — связное топологическое пространство, все компоненты линейной связности которого односвязны. Может ли оно иметь нетривиальную фундаментальную группу?

Задача 9.65*. Пусть B — множество полиномов

$$P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_0$$

над $\mathbb{C}$, у которых все корни разные, а B_1 — множество всех наборов $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ попарно различных чисел $x_i \in \mathbb{C}$. Введем на B и B_1 естественную топологию подмножества в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим отображение $\pi\colon B_1 \to B$, $(x_1, \ldots, x_n) \to \prod(t - x_i)$. Докажите, что π — накрытие Галуа. Найдите его группу Галуа.

Задача 9.66*. Постройте связное накрытие, которое не будет накрытием Галуа.

Листок 10

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И ГОМОТОПИИ

10.1. Гомотопии

Все топологические пространства в этом листочке предполагаются локально линейно связными и хаусдорфовыми, если не оговорено противное[1].

Определение 10.1. Пусть $f_1, f_2\colon X \to Y$ — непрерывные отображения топологических пространств. Напомним, что *гомотопией* между f_1 и f_2 называется такое непрерывное отображение $F\colon [0,1] \times X \to Y$, что $F|_{\{0\}\times X} = f_1$, а $F|_{\{1\}\times X} = f_2$.

Задача 10.1. Докажите, что гомотопные отображения индуцируют один и тот же гомоморфизм $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.

Определение 10.2. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ — непрерывные отображения топологических пространств, причем $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям из X в X и из Y в Y. Такие отображения называются *гомотопическими эквивалентностями*, а X и Y — *гомотопически эквивалентными*.

Задача 10.2. Докажите, что композиция гомотопических эквивалентностей отображений есть гомотопическая эквивалентность. Докажите, что гомотопическая эквивалентность пространств есть отношение эквивалентности.

Задача 10.3^!. Пусть $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность. Докажите, что f индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Задача 10.4. Пусть $X \subset Y$ — деформационный ретракт. Докажите, что X и Y гомотопически эквивалентны.

Задача 10.5^!. Пусть X — топологическое пространство. Докажите, что X стягиваемо тогда и только тогда, когда оно гомотопически эквивалентно точке.

Задача 10.6^!. Дан связный граф Γ, у которого n ребер и n вершин. Докажите, что его топологическое пространство гомотопически эквивалентно окружности.

Задача 10.7^!. Пусть M — связное топологическое пространство, а $x, x', y, y' \in M$ — любые точки. Докажите, что соответствующие

1 В этом листке также термин «связность» следует понимать как «линейная связность». — *Прим. ред.*

пространства путей $\Omega(M, x, x')$ и $\Omega(M, y, y')$ гомотопически эквивалентны.

Указание. Выберите путь γ_{xy}, соединяющий x и y, и путь $\gamma_{x'y'}$, соединяющий x' и y'. Пусть $\gamma_{xy}^{-1}(t) = \gamma_{xy}(1-t)$ и $\gamma_{x'y'}^{-1}(t) = \gamma_{x'y'}(1-t)$. Рассмотрим отображение $f\colon \Omega(M, x, x') \to \Omega(M, y, y')$, переводящее любой путь $\gamma \in \Omega(M, x, x')$ в композицию $\gamma_{xy}^{-1}\gamma\gamma_{x'y'}$, и аналогичное отображение $g\colon \Omega(M, y, y') \to \Omega(M, x, x')$, переводящее $\gamma \in \Omega(M, y, y')$ в $\gamma_{xy}\gamma\gamma_{x'y'}^{-1}$. Докажите, что отображение fg гомотопно тождественному и gf гомотопно тождественному.

10.2. Пространства путей на локально стягиваемых пространствах

Определение 10.3. Пусть M — топологическое пространство. Оно называется *локально стягиваемым*, если у каждой точки есть база из стягиваемых окрестностей.

Задача 10.8. Пусть M — локально стягиваемое топологическое пространство. Докажите, что M локально линейно связно.

Задача 10.9*. Пусть M — такое геодезически связное метрическое пространство, что для какого-то $\delta > 0$ любые две точки, отстоящие друг от друга на расстояние, меньшее δ, соединяются единственной геодезической. Докажите, что M локально стягиваемо.

Задача 10.10. Докажите, что любой граф локально стягиваем.

Определение 10.4. Топологическое пространство M называется *многообразием размерности n*, если у любой точки найдется окрестность, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Многообразия, очевидно, локально стягиваемы.

Задача 10.11!. Докажите, что сфера S^n — это многообразие.

Указание. Воспользуйтесь стереографической проекцией.

Задача 10.12. Пусть M стягиваемо, $x, y \in M$. Докажите, что все пути $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ гомотопны.

Задача 10.13!. Пусть $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ — путь в локально стягиваемом пространстве M, а $\{U_\alpha\}$ — множество стягиваемых открытых множеств на M. Выберем в $\{U_\alpha\}$ конечное подмножество, покрывающее γ (это можно сделать, потому что путь γ компактен). Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — соответствующее покрытие отрезка $[0, 1]$ связными интервалами, где V_i является связной компонентой $\gamma^{-1}(U_i)$, а все U_i стягиваемы. Упорядочим V_i таким образом, что V_i и V_{i+1} пересекаются в точке t_i, и пусть $a_i := \gamma(t_i)$. Докажите, что любой путь $\gamma' \in \Omega(M, x, y)$, для которого $\gamma'(t_i) = a_i$ и $\gamma'([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, гомотопен γ.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.14!. Пусть M — локально стягиваемое топологическое пространство, а $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ — некоторый путь. Докажите, что у γ найдется такая окрестность $\mathcal{U} \subset \Omega(M, x, y)$, что все пути $\gamma' \in \mathcal{U}$ гомотопны.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Заметим, что на компактных многообразиях размерности больше 1 существует петли, задаваемые сюръективным отображением; пример такой петли легко построить тем же методом, что кривую Пеано.

Задача 10.15!. Пусть M — многообразие (например, сфера) размерности больше 1, а $\gamma \in \Omega(M, x)$ — петля. Докажите, что γ гомотопна петле, которая несюръективна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.16!. Пусть $n > 1$. Докажите, что n-мерная сфера односвязна.

Указание. Пусть γ — петля на сфере. Воспользовавшись предыдущей задачей, прогомотопируйте γ в петлю, которая отображает $[0, 1]$ в $S^n \setminus \{x\}$, где x — некоторая точка. Докажите, что сфера без точки гомеоморфна $\mathbb{R}^n$ и, в частности, стягиваема.

Задача 10.17*. Пусть M стягиваемо, а $F\colon M \times [0, 1] \to M$ — гомотопия тождественного отображения в постоянное отображение $M \to y \in M$. Рассмотрим отображение $M \to \Omega(M, y, *)$, $m \to (t \to F(t, m))$ $(t \in [0, 1])$. Докажите, что оно непрерывно.

Задача 10.18. Пусть M локально стягиваемо, $x, y \in M$ — две точки, $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ — некоторый путь. Докажите, что у γ есть такая окрестность $\mathcal{U} \subset \Omega(M, x, *)$, что все пути $\gamma' \in \mathcal{U}$, соединяющие x и a, гомотопны в $\Omega(M, x, a)$.

Задача 10.19*. Пусть M — локально стягиваемое топологическое пространство, $x \in M$ — точка, а $\Omega(M, x, *)$ — множество всех путей, начинающихся в точке x, снабженное открыто-компактной топологией. Рассмотрим такое отношение эквивалентности на $\Omega(M, x, *)$: $\gamma \sim \gamma'$, если γ и γ' соединяют x и y и гомотопны в $\Omega(M, x, y)$. Рассмотрим $\Omega(M, x, *)/\sim$ с топологией фактора. Выберем стягиваемую окрестность $U_y \ni y$, и пусть $F\colon U_y \to \Omega(U_y, y, *)$ — отображение, построенное в задаче 10.17. Пусть $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ — некоторый путь, а

$\Psi\colon U_y \to \Omega(M, x, *)$ — отображение, ставящее в соответствие точке $a \in U_y$ путь $\gamma F(a)$ (т. е. путь, заданный на $[0, 1/2]$ как $t \to \gamma(2t)$ и на $[1/2, 1]$ как $F(a, 2t-1)$). Докажите, что (для достаточно маленького U_y) Ψ в композиции с $\Omega(M, x, *) \xrightarrow{\pi} \Omega(M, x, *)/\sim$ — это гомеоморфизм U_y на некоторое открытое подмножество в $\Omega(M, x, *)/\sim$.

Указание. Непрерывность $\Psi \circ \pi$ очевидна по построению, а инъективность следует из предыдущей задачи. Чтобы убедиться, что $\Psi \circ \pi$ задает гомеоморфизм U_y на $\Psi \circ \pi(U_y)$, нам нужно доказать, что $\Psi \circ \pi$ переводит открытые множества в открытые. Это ясно из того, что естественное отображение $\Omega(M, x, *)/\sim \to M$, $\gamma' \to \gamma'(1)$, непрерывно и индуцирует гомеоморфизм U_y на образ.

Задача 10.20*. Рассмотрим отображение $\Omega(M, x, *)/\sim \to M$, ставящее в соответствие пути $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ точку $y = \gamma(1)$. Докажите, что это накрытие.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.21!. Докажите, что $\Omega(M, x, *)$ стягиваемо.

Задача 10.22*. Пусть γ — путь в $\Omega(M, x, *)/\sim$. Докажите, что он гомотопен образу некоторого пути из $\Omega(M, x, *)$.

Указание. Докажите, что γ можно поднять до пути в $\Omega(M, x, *)$ локально, и воспользуйтесь тем обстоятельством, что для каждой точки в $\Omega(M, x, *)/\sim$ ее прообраз в $\Omega(M, x, *)$ связен.

Задача 10.23*. Выведите из этого, что $\Omega(M, x, *)/\sim$ односвязно.

Замечание. Пусть (M, x) — локально стягиваемое топологическое пространство с отмеченной точкой. Универсальное накрытие пространства M можно таким образом отождествить с множеством пар ($y \in M$, класс гомотопии путей $\gamma \in \Omega(M, x, y)$).

10.3. Свободная группа и букет

Определение 10.5. Пусть (M_1, x_1), (M_2, x_2), (M_3, x_3), … — набор (возможно, бесконечный) связных топологических пространств с отмеченной точкой. Рассмотрим факторпространство несвязного объединения всех (M_α, x_α) по отношению эквивалентности $x_1 \sim \sim x_2 \sim x_3 \sim \ldots$ Это факторпространство называется *букетом* и обозначается $\bigvee_\alpha (M_\alpha, x_\alpha)$. Также букет обозначается $(M_1, x_1) \vee (M_2, x_2) \vee \vee (M_3, x_3) \vee \ldots$

Задача 10.24. Пусть все M_α связны (линейно связны, хаусдрофовы). Докажите, что их букет связен (линейно связен, хаусдорфов).

Задача 10.25$^!$**.** Пусть все M_α связны и односвязны. Докажите, что их букет односвязен.

Задача 10.26$^!$**.** Пусть Γ — связный граф, у которого n вершин и $n+k-1$ ребер. Докажите, что его топологическое пространство M_γ гомотопически эквивалентно букету k окружностей.

Указание. Пусть у Γ есть ребро r, соединяющее две разные вершины v_1, v_2, Рассмотрим граф γ', у которого $n-1$ вершин и $n+k-2$ ребер, полученный из Γ следующим образом. Из Γ выкидывается ребро r, а вершины v_1 и v_2 склеиваются в одну. Докажите, что M_γ и $M_{\gamma'}$ гомотопически эквивалентны.

Определение 10.6. Зададим множество $\{a_1, a_2, \ldots\}$ мощности N (N может быть как конечным кардиналом, так и бесконечным). *N-арное дерево D_N* — это бесконечный граф, который определяется следующим образом. Вершины графа D_N — конечные последовательности из символов a_i. Ребрами соединяются вершины, соответствующие $A_1A_2\ldots A_k$ и $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ (все A_i принадлежат $\{a_1, a_2, \ldots\}$).

Задача 10.27. Докажите, что в каждую вершину D_N входят $N+1$ ребер.

Задача 10.28$^!$**.** Пусть M_N — топологическое пространство N-арного дерева с естественной метрикой, построенной в начале этого листка. Докажите, что M_N является звездчатым (любые две точки соединяются единственной геодезической). Докажите, что оно стягиваемо.

Задача 10.29$^!$**.** Рассмотрим $(2N-1)$-арное дерево. Раскрасим его ребра в N цветов таким образом, что к каждой вершине сходится по 2 ребра каждого цвета. Рассмотрим букет из N окружностей и раскрасим каждую из окружностей в свой цвет. Рассмотрим отображение из M_{2N-1} в букет из N окружностей, переводящее вершины графа в вершину букета, а ребро цвета a_i в окружность такого же цвета. Докажите, что это универсальное накрытие.

Задача 10.30. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — множество мощности N, а $\mathscr{W}$ — множество конечных последовательностей («слов») из символов a_i, a_j^{-1}, в которых нигде не встречаются подряд $a_ia_i^{-1}$, а также $a_i^{-1}a_i$. Последовательность длины 0 обозначается e. Мы умножаем слова, записывая одно за другим и зачеркивая последовательно все $a_ia_i^{-1}$, $a_i^{-1}a_i$, которые встречаются подряд. Докажите, что $\mathscr{W}$ образует группу.

Определение 10.7. Эта группа называется *свободной группой, порожденной образующими* $\{a_1, a_2, \ldots\}$, и обозначается F_N.

Задача 10.31. Докажите, что группа F_1 изоморфна $\mathbb{Z}$.

Задача 10.32!. Пусть G — любая группа, а $\{g_1, g_2, \ldots\}$ — набор из N элементов группы G, пронумерованный множеством $\{a_1, a_2, \ldots\}$. Докажите, что существует единственный гомоморфизм $F_N \to G$, переводящий a_i в g_i.

Задача 10.33!. Постройте свободное действие F_N на топологическом пространстве M_{2N-1} $(2N-1)$-арного дерева, транзитивное на вершинах.

Задача 10.34!. Докажите, что M_{2N-1}/F_N — букет N окружностей, а фундаментальная группа букета свободна.

Задача 10.35!. Докажите, что любой (возможно, бесконечный) граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.

Задача 10.36!. Выведите из этого, что любая подгруппа свободной группы свободна.

Указание. Воспользуйтесь теорией Галуа для накрытий.

Задача 10.37*. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — какой-то набор групп. Рассмотрим множество $\mathscr{W}$ конечных последовательностей неединичных элементов из разных G_i, в котором элементы одной и той же группы нигде не идут подряд. Из любой конечной последовательности A элементов из G_i можно получить элемент $\mathscr{W}$ следующим способом. Если в A идут подряд два элемента из G_i, мы заменяем эти два элемента на их произведение. Если в A встречается единица одной из групп, мы ее вычеркиваем. Повторим эту процедуру столько раз, сколько нужно, чтобы получить элемент из $\mathscr{W}$. Элементы $\mathscr{W}$ можно перемножать, записав одно слово после другого и применив вышеописанную процедуру. Докажите, что получится группа.

Определение 10.8. Эта группа называется *свободным произведением групп G_1, G_2, …*

Задача 10.38. Докажите, что свободная группа с N образующими — это свободное произведение N копий $\mathbb{Z}$.

Задача 10.39. Докажите, что свободное произведение свободных групп свободно.

Задача 10.40*. Пусть (M_1, x_1), (M_2, x_2), (M_3, x_3), … — набор связных топологических пространств с отмеченной точкой. Докажите, что фундаментальная группа букета $\pi_1\big(\bigvee_\alpha (M_\alpha, x_\alpha)\big)$ изоморфна свободному произведению групп $\pi_1(M_1, x_1)$, $\pi_1(M_2, x_2)$, $\pi_1(M_3, x_3)$, …

Часть III

ЛЕКЦИИ ПО ТОПОЛОГИИ

Лекция 1

МЕТРИКА, ПОПОЛНЕНИЕ, p-АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

1.1. Метрические пространства и пополнение

Определение и свойства вещественных чисел см. в приложении в конце этой книги. Обозначим через $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ множество всех неотрицательных вещественных чисел.

Определение 1.1. Пусть M — множество. *Метрикой* на M называется функция $d\colon M \times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, удовлетворяющая для любых точек $x, y, z \in M$ следующим условиям.

Невырожденность: $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
Симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$.
Неравенство треугольника: $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Определение метрики весьма точно соответствует интуитивному представлению о «расстоянии». Аксиоматическое определение метрического пространства дал Морис Фреше в 1906 г., но сам тер-

Морис Фреше (Maurice Fréchet, 1878 — 1973) мин «метрическое пространство» (metrischer Raum) принадлежит Хаусдорфу. Слово «расстояние» часто используют как синоним слова «метрика», особенно в конструкциях типа «расстояние от x до y». Также говорят «расстояние от x до y в метрике d».

Пример 1.2. Глупый пример метрического пространства: M — любое множество, а $d(x, y) = 1$ для любых точек $x \neq y$. Проверьте аксиомы.

Пример 1.3. Пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой $d(x, y) = |x - y|$ — метрическое пространство. Проверьте аксиомы (если вдруг не получится, загляните в лекцию 2).

Определение 1.4. Пусть M, N — метрические пространства. Вложение $\iota : M \hookrightarrow N$ называется *изометрическим вложением*, если ι сохраняет расстояния: $d_M(x, y) = d_N(\iota(x), \iota(y))$ для любых $x, y \in M$. *Изометричные пространства* — пространства, между которыми есть биекция, сохраняющая расстояния.

Определение 1.5. Пусть $x \in M$ — точка в метрическом пространстве. Открытый *ε-шар* $B_\varepsilon(x)$ с центром в x — множество всех точек, отстоящих от x меньше чем на ε:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Определение 1.6. Пусть M — метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M называется *последовательностью Коши*, если для каждого $\varepsilon > 0$ все элементы последовательности $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа, содержатся в некотором ε-шаре. Последовательности Коши $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ называются *эквивалентными*, если последовательность $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots$ является последовательностью Коши. (Докажите, что это отношение эквивалентности.)

Определение 1.7. Говорят, что последовательность Коши $\{\alpha_i\}$ *сходится к* $x \in M$, если $\alpha_0, x, \alpha_1, x, \alpha_2, \ldots$ — последовательность Коши. В этом случае также говорят, что x — это *предел* последовательности $\{\alpha_i\}$. Метрическое пространство M называется *полным*, если у любой последовательности Коши есть предел.

В МГУ обыкновенно изучают последовательности в $\mathbb{R}$, но доказательства легко переносятся на случай произвольного метрического пространства.

Среди прочего верно следующее (проверьте).

1. Предел последовательности Коши единственный (если он существует).

2. Подпоследовательность последовательности Коши — снова последовательность Коши. Последовательность Коши эквивалентна любой своей подпоследовательности.

3. Если переставить элементы последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ произвольным образом, то получится последовательность Коши, эквивалентная $\{\alpha_i\}$.

Определение 1.8. *Диаметр* множества $X \subset M$ есть $\sup\limits_{x,y \in X} d(x, y)$.

Легко видеть, что диаметр ε-шара не больше 2ε (проверьте). С другой стороны, для каждой точки $x \in M$ и любых точек y, z, $d(y, z) < \varepsilon$, верно неравенство

$$|d(x, z) - d(y, z)| < 2\varepsilon, \tag{1.1.1}$$

которое следует из неравенства треугольника. Из формулы (1.1.1) вытекает, что для любой последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ последовательность вещественных чисел $d(x, \alpha_i)$ — тоже последовательность Коши: если все α_i содержатся в ε-шаре, то все $d(x, \alpha_i)$ содержатся в отрезке длины 2ε. Похожее рассуждение доказывает, что для любых последовательностей Коши $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$ последовательность $\{d(\alpha_i, \beta_i)\}$ — тоже последовательность Коши. Более того, если $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ не эквивалентны, то предел последовательности $\{d(\alpha_i, \beta_i)\}$ ненулевой. Проверьте каждое из этих утверждений!

Пусть дано метрическое пространство M. Обозначим через $\overline{M}$ множество классов эквивалентности последовательностей Коши в M. Определим на $\overline{M}$ метрику формулой

$$d(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}) := \lim d(\alpha_i, \beta_i).$$

Докажите, что это метрическое пространство.

Определение 1.9. Множество классов эквивалентности последовательностей Коши в M с метрикой, определенной выше, называется *пополнением* пространства M.

Эта конструкция хорошо известна большинству студентов, ибо таким образом в курсе анализа определяется множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел (как множество классов эквивалентности последовательностей Коши из $\mathbb{Q}$). Пополнение метрического пространства впервые появилось в монографии Хаусдорфа «Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen» (1914).

Пополнение является полным метрическим пространством. Чтобы в этом убедиться, возьмем последовательность Коши $\{\alpha_i(0)\}$, $\{\alpha_i(1)\}$, $\{\alpha_i(2)\}$, …, где для каждого фиксированного N $\{\alpha_*(N)\}$ — последовательности Коши в M (звездочка обозначает произвол в выборе индекса). Для доказательства полноты $\overline{M}$ нам нужно предъявить такую последовательность Коши $\{\beta_i\}$ элементов M, что $\{\alpha_i(0)\}$, $\{\alpha_i(1)\}$, $\{\alpha_i(2)\}$, … сходится к $\{\beta_i\}$. Первое, что приходит в голову, — взять диагональную последовательность $\beta_i := \alpha_i(i)$. Этот аргумент не работает, потому что на i-м месте в последовательности Коши может стоять что угодно. Надо для каждого N заменить $\{\alpha_i(N)\}$ на подпоследовательность, которая сходится очень быстро, например, такую, что точки $\alpha_i(N)$, $\alpha_{i+1}(N)$, $\alpha_{i+2}(N)$, … содержатся в шаре радиуса 2^{-i}. Тогда $\{\alpha_i(i)\}$ — последовательность Коши, которая является пределом последовательности последовательностей Коши $\{\alpha_i(0)\}$, $\{\alpha_i(1)\}$, $\{\alpha_i(2)\}$, …

Упражнение. Докажите это.

Убедиться в полноте пространства последовательностей Коши проще всего, решив вышеприведенное упражнение, но для полноты я добавлю его решение. Оно выглядит угрожающе, и я советую читателю решить эту задачу самостоятельно, вместо того чтобы читать его.

Пусть $\{\alpha_*(N)\}$, $N = 1, 2, 3, \ldots,$ — последовательность Коши последовательностей Коши. Заменим каждую последовательность $\{\alpha_*(N)\}$ на ее подпоследовательность $\{\alpha'_*(N)\}$ таким образом, что $d(\alpha'_i(N), \alpha'_{i+1}(N)) < 2^{-i}$. В этом случае расстояние между постоянной последовательностью $\alpha_i(N)$, $\alpha_i(N)$, … и $\alpha_*(N)$ меньше чем 2^{-i}:

$$d(\{\alpha_i(N), \alpha_{i+1}(N), \alpha_{i+2}(N), \ldots\}, \{\alpha_i(N), \alpha_i(N), \alpha_i(N), \ldots\}) < 2^{-i}. \tag{1.1.2}$$

Поскольку $\{\alpha_*(N)\}$, $N = 1, 2, 3, \ldots,$ — последовательность Коши последовательностей Коши, все $\{\alpha_*(N)\}$ начиная с какого-то номера N_k содержатся в шаре радиуса 2^{-k}. Заменив $\{\alpha_*(N)\}$ на подпоследовательность, можем считать, что все последовательности $\{\alpha_*(N+i)\}$, $i \geqslant 0$, содержатся в шаре радиуса 2^{-N}. Применяя неравенство (1.1.2), получаем, что

$$d\Big(\{\alpha_i(N+k), \alpha_{i+1}(N+k), \alpha_{i+2}(N+k), \ldots\},\\ \{\alpha_i(N), \alpha_i(N), \alpha_i(N), \ldots\}\Big) < 2^{-k},$$

где $k = \max(N, i)$. Теперь мы можем применить неравенство треугольника в пространстве последовательностей Коши к точкам

$$\{\alpha_*(n_2)\},\ \{\alpha_{n_1}(n_2), \alpha_{n_1}(n_2), \ldots\},\ \{\alpha_{n_3}(n_4), \alpha_{n_3}(n_4), \ldots\},\ \{\alpha_*(n_4)\}$$

и получим $d(\alpha_{n_1}(n_2), \alpha_{n_3}(n_4)) < 2^{-n+2}$, где $n = \min(n_1, n_2, n_3, n_4)$. Значит, последовательность $\{\alpha_k(k), \alpha_{k+1}(k+1), \alpha_{k+2}(k+2), \ldots\}$ содержится в шаре радиуса

$$2^{-k+3} + 2^{-k+2} + 2^{-k+1} + \ldots < 2^{-k+4}$$

т. е. является последовательностью Коши. При этом $\{\alpha_i(N)\}$ отстоит от $\{\alpha_i(i)\}$ не больше чем на 2^{-N+1}. Следовательно, последовательность Коши $\{\alpha_i(i)\}$ — это предел последовательности последовательностей Коши $\{\alpha_i(0)\}$, $\{\alpha_i(1)\}$, $\{\alpha_i(2)\}$, …

Мы доказали полноту пространства последовательностей Коши.

Пример 1.10. Пространство с метрикой $d(x, y) = 1$ для любых $x \neq y$ полно (докажите).

Пример 1.11. Пространство $\mathbb{Q}$ с обычной метрикой неполно, и его пополнение — это $\mathbb{R}$. К сожалению, буквально эту конструкцию для определения $\mathbb{R}$ использовать нельзя, потому что метрика на метрическом пространстве принимает значения в $\mathbb{R}$. Поэтому приходится сначала определять $\mathbb{R}$ как множество классов эквивалентности последовательностей Коши в $\mathbb{Q}$, а затем определять пополнение метрического пространства, повторяя эту же самую конструкцию еще раз.

Пример 1.12. Пространство $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой полно (докажите).

1.2. Нормирование на группах и кольцах

Метрику можно вводить на различных алгебраических объектах — группах, кольцах, полях и так далее. Делается это следующим образом.

Определение 1.13. Пусть G — абелева группа, а d — метрика на G. Мы будем использовать обозначение $x, y \to x + y$ для групповой операции в абелевых группах. Говорят, что $(G, +, d)$ — метрическая группа, если операция $x \to -x$ взятия обратного элемента есть изометрия и операция $x \to x + g$ есть изометрия для любого $g \in G$.

В этом случае также говорят, что метрика *согласована с групповой структурой* или что метрика *инвариантна*.

Определение 1.14. Функция $\nu\colon G\to\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется *нормой на группе*, если

1) $\nu(g)=\nu(-g)$, $\nu(0)=0$;
2) $\nu(g)>0$ для любого $g\neq 0$;
3) $\nu(g+g')\leqslant\nu(g)+\nu(g')$ для любых $g, g'\in G$.

Легко видеть, что при этом функция $d_\nu(x, y):=\nu(x-y)$ задает метрику на G, согласованную с групповой структурой. Обратно, любая такая метрика задает норму $\nu(x):=d(x, 0)$ (проверьте).

Множество последовательностей Коши в метрической группе с операцией почленного сложения образует группу, а последовательности Коши, эквивалентные нулю, — подгруппу этой группы. Это легко видеть из следующего соображения. Пусть $A, B\subset G$ — подмножества в группе. Множество всех сумм вида $\{a+b\colon a\in A,\ b\in B\}$ обозначается $A+B$. Легко видеть, что сумма двух шаров радиусов $\varepsilon, \varepsilon'$ содержится в шаре радиуса $\varepsilon+\varepsilon'$. Следовательно, для любых последовательностей Коши $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ все члены суммы $\{a_i+b_i\}$, кроме конечного числа, содержатся в шаре сколь угодно малого наперед заданного радиуса.

Факторгруппа группы последовательностей Коши по подгруппе последовательностей Коши, эквивалентных нулю, — это пополнение группы G. Таким образом, пополнение метрической группы есть снова метрическая группа. Эта конструкция хорошо известна для группы рациональных чисел по сложению; таким образом строится аддитивная структура на множестве вещественных чисел.

Определение 1.15. Пусть A — кольцо с ассоциативным и коммутативным умножением, а $\nu\colon A\to\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ — функция на A. Функция ν называется *нормой на кольце*, если выполнены следующие условия.

1) Рассмотрим A как группу с групповым законом, заданным сложением. Тогда ν — это норма. Иначе говоря, $\nu(g)>0$ для каждого $g\neq 0$, $\nu(0)=0$, $\nu(g)=\nu(-g)$ и $\nu(g+g')\leqslant\nu(g)+\nu(g')$.

2) Норма мультипликативна: $\nu(xy)=\nu(x)\,\nu(y)$.

Примером нормы на кольце является отображение $t\to|t|$, определенное на $\mathbb{Q}$ и на $\mathbb{R}$. Другим примером является дискретная норма: $\nu(t)=0$, если $t=0$, и $\nu(t)=1$ в противном случае. Она мультипликативна на любом кольце, в котором из равенства $xy=0$

следует, что $x=0$ или $y=0$ (такие кольца называются *кольцами без делителей нуля*).

Кольцо с нормой наделено инвариантной метрикой, построенной по формуле $d_\nu(x,y)=\nu(x-y)$. Множество последовательностей Коши в таком кольце с операциями почленного сложения и умножения образует кольцо, а последовательности, эквивалентные нулю, — идеал[1] в этом кольце. Фактор по этому идеалу есть пополнение кольца A по метрике d_ν. Мы получили, что пополнение кольца по метрике, заданной нормой, — снова кольцо.

Аналогичную процедуру можно провести с полем. Почленного деления последовательности Коши на последовательность Коши не получится, потому что в ненулевой последовательности Коши могут содержаться элементы, равные нулю. Но каждую последовательность Коши, не эквивалентную нулю, можно заменить на подпоследовательность, не содержащую нулей, а такие подпоследовательности можно делить почленно. То, что частное снова будет последовательностью Коши, проверяется за 3-4 строки вычислений.

Из этого следует, что пополнение поля с нормой — это поле.

1.3. Целые p-адические числа: неархимедова геометрия

Начиная с интересных нормирований на кольцах, можно получать очень полезные алгебраические объекты. Зафиксируем простое число p.

Определение 1.16. Пусть $x\in\mathbb{Z}$ представимо в виде $x=p^\alpha x_1$, где x_1 не делится на p, а $\alpha\in\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$. Тогда *p-адическая норма* $\nu_p(x)$ равна $p^{-\alpha}$. Положим $\nu_p(0)=0$. Проверьте, что это норма. Пополнение $\mathbb{Z}$ относительно такой нормы называется *кольцом целых p-адических чисел* и обозначается $\mathbb{Z}_p$.

Аналогичная конструкция, примененная к $\mathbb{Q}$, даст пополнение $\mathbb{Q}_p$, которое называется *полем p-адических чисел*. Любое рациональ-

1 Напомним, что идеал I в кольце A — это такая подгруппа по сложению в A, что для любых $a\in A$, $\iota\in I$ произведение $a\iota$ лежит в I. Факторгруппа по идеалу наделена естественной структурой кольца. Обратное тоже верно: для любого гомоморфизма колец $\varphi: A\to A_1$ ядро φ является идеалом.

ное число $a \in \mathbb{Q}$ можно представить в виде $a = p^{\alpha}\frac{m}{n}$, где n, m взаимно просты с p, а α — целое число, однозначно заданное разложением числителя и знаменателя a на простые множители. Определим $\nu_p(a) := p^{-\alpha}$. Докажите, что это норма на поле $\mathbb{Q}$.

p-адическая норма задает метрику обычным способом:

$$d(x, y) = \nu_p(x - y).$$

Эта метрика довольно замечательна геометрически, ибо обладает свойством *неархимедовости*:

$$d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(y, z)).$$

Из этого условия следует аксиома треугольника, но оно сильнее. Для нормы то же самое записывается в виде

$$\nu_p(x + y) \leqslant \max(\nu_p(x), \nu_p(y)).$$

Проверьте, что эти условия равносильны. Проверьте это неравенство для p-адической нормы.

Неархимедовость метрического пространства равносильна такому условию. Пусть задан треугольник x, y, z с длинами сторон a, b, c. Тогда две из сторон равны, а третья не превосходит каждой из них. Действительно, пусть a — самая длинная сторона. Из неархимедовости следует, что $a \leqslant \max(b, c)$, поэтому b или c имеет такую же длину, а третья сторона (самая маленькая) такая же или меньше.

Геометрически это свойство можно переформулировать так: любой треугольник в неархимедовом пространстве равнобедренный, и его основание не превосходит двух других сторон.

Если $B_\varepsilon(a)$ — ε-шар в неархимедовом пространстве с центром в точке a, а x, y — две его точки, то $d(x, y) \leqslant \max(d(x, a), d(y, a)) \leqslant \varepsilon$. Поэтому ε-шар с центром в любой точке шара $B_\varepsilon(a)$ совпадает с $B_\varepsilon(a)$. В неархимедовом пространстве любая точка шара является его центром.

Неархимедова геометрия довольно полезна в теории чисел, алгебраической геометрии и других науках. Например, в физике высоких энергий некоторые версии теории струн развивают исходя из того, что физическое пространство в очень малых (квантовых) масштабах имеет геометрию, приближающуюся к неархимедовой.

1.4. Арифметика p-адических чисел

Ряд Тейлора есть способ записи функций в виде

$$f(z)=\sum_{i\geqslant 0} a_i(z-z_0)^i.$$

Ряды Тейлора (без формального обоснования и определения) употреблял еще Ньютон; сам Тейлор, который был его младшим современником, называл их «ряды сэра Исаака Ньютона». Большинство функций одного переменного, с которыми математики имеют дело в повседневной жизни, разлагаются в ряд Тейлора. Скажем, синус записывается так:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{120}-\ldots=\sum_{i\geqslant 0}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Упражнение. Проверьте, что этот ряд сходится для всех $x\in\mathbb{R}$ и для всех $x\in\mathbb{C}$.

p-адическое разложение числа чем-то сродни разложению функции в ряд Тейлора (в теории чисел эту аналогию используют постоянно). p-адические числа удобно записывать в виде рядов, аналогичных рядам Тейлора, следующим образом.

Легко видеть, что в любой полной группе с инвариантной метрикой, заданной нормой ν, ряд вида $\sum g_i$ сходится, если сходится соответствующий ряд из норм $\sum \nu(g_i)$ (проверьте). Поскольку $\nu(p^i z)\leqslant p^{-i}$, для любой последовательности целых чисел z_i ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} z_i p^i$ сходится к целому p-адическому числу. Действительно,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\nu(z_i p^i)\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}p^{-i}=\frac{p}{p-1}$$

(геометрическая прогрессия).

В частности, сходится ряд

$$1+p+p^2+p^3+\ldots$$

Дробное число $\dfrac{1}{1-p}$ является целым p-адическим! Действительно, сумма этого ряда, будучи умножена на $1-p$, дает 1 (проверьте это).

Если два целых числа a, b принадлежат ε-шару, где $2\varepsilon<p^{-i}$, то разность $a-b$ делится на p^i (проверьте). Записав элементы последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ целых чисел в p-ичной системе счисления,

мы получим нечто вроде

0000000000000000000000000000000000020
0000000000093275091374509172340957210
0000000000000026381637617631863181610
0000000000007927931793719279129881610
0000000000000000009812038102829881610
0000082739812739127397038102829881610
0003719237912723927397038102829881610
7213719237912723927397038102829881610

Из этой таблицы наглядно видно, что соответствующая последовательность цифр стабилизируется: на i-м месте начиная с какого-то момента стоит одна и та же цифра. Пределом последовательности будет, очевидно, сумма вида $\sum\limits_{i=0}^{\infty} z_i p^i$, где z_i, $0 \leqslant z_i \leqslant p-1$, — i-я цифра с конца в p-ичном представлении числа α_N для достаточно большого N.

Как и вещественные числа, p-адические числа можно складывать и умножать в столбик, не забывая переносить переполнение в следующий регистр. Продумайте эту процедуру, самостоятельно посчитайте произведение и сумму каких-нибудь p-адических чисел.

Для каждого n, не делящегося на p, уравнение $nx = 1 \mod p$ имеет целое решение. Пусть $v := 1 - nx$. Очевидно, $\nu(v) \leqslant 1/p$, и поэтому сумма вида $1 + v + v^2 + v^3 + \ldots$ сходится. Поскольку

$$(1 + v + v^2 + v^3 + \ldots)(1 - v) = 1,$$

имеем $1 + v + v^2 + v^3 + \ldots = \dfrac{1}{xn}$, поэтому $\dfrac{1}{n} = x + vx + v^2x + v^3x + \ldots$ Таким образом, в кольце целых p-адических чисел определено деление на любое n, взаимно простое с p.

Из этого видно, что рациональное число $a \in \mathbb{Q}$ является целым p-адическим тогда и только тогда, когда $a = m/n$ и n взаимно просто с p. Другими словами, рациональное число $a \in \mathbb{Q}$ является целым p-адическим тогда и только тогда, когда $\nu(a) \leqslant 1$. Целые p-адические числа — это шар радиуса 1 в $\mathbb{Q}_p$ с центром в любом целом числе, например в нуле (напомним, что центром шара в неархимедовом метрическом пространстве является любая его точка).

В кольце p-адических чисел можно совершать и более сложные алгебраические операции, например, вычислять квадратный корень. Из разложения Тейлора следует, что сумма ряда

$$S := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i)!\, x^i}{(1-2i)(i!)^2 4^i N^{2i-1}} \tag{1.4.1}$$

удовлетворяет соотношению $S^2 = N^2 + x$, если этот ряд сходится. Из равенства $S^2 = N^2 + x$ и единственности разложения в ряд Тейлора следует ряд комбинаторных тождеств (по одному для каждой степени x), которые можно усмотреть непосредственно. Воспользовавшись этими комбинаторными тождествами, получим, что из абсолютной сходимости ряда (1.4.1) в каком-нибудь нормированном поле (например, в p-адическом) следует, что его сумма тоже удовлетворяет соотношению $S^2 = N^2 + x$.

Если p нечетно и взаимно просто с N, то $\dfrac{1}{4^i N^{2i-1}}$ — целое p-адическое число. Частное $\dfrac{(2i)!}{(i!)^2}$ целое, потому что это биномиальный коэффициент. Получаем, что норма i-го члена этой суммы оценивается следующим образом:

$$\nu(\xi_i) \leqslant \nu\left(\frac{x^i}{1-2i}\right) \leqslant (1-2i)p^{-i} \tag{1.4.2}$$

(здесь мы используем неравенство

$$\nu\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant k,$$

верное для любого целого k; докажите его). Используя неравенство (1.4.2) и сходимость ряда $\sum(2i-1)p^{-i}$ (докажите), мы получаем, что ряд (1.4.1) сходится. Поэтому в кольце p-адических чисел для нечетного p можно вычислять квадратный корень из числа вида $N^2 + x$, где x делится на p, а N взаимно просто с p.

Задача 1.1. Какие квадратные уравнения можно решить в $\mathbb{Z}_p$? А в $\mathbb{Q}_p$?

Это рассуждение можно обобщить для произвольного алгебраического уравнения. Знаменитая лемма Гензеля (Hensel's lemma) утверждает, что любое полиномиальное уравнение вида $P(x) = 0$ с целыми коэффициентами имеет решение в $\mathbb{Z}_p$, если $P(a) = 0 \mod p$ для какого-то целого числа a и $P'(a) \neq 0 \mod p$. Здесь P' обозначает производную многочлена P. Лемма Гензеля доказывается рекурсивно, решением системы уравнений вида

$$P(a_i) = 0 \mod p^{i+1}, \quad a_i - a_{i-1} = 0 \mod p^i.$$

Задача 1.2. Докажите лемму Гензеля.

Курт Гензель (Kurt Hensel, 1861—1941)

p-адические числа изобрел в 1897 г. Курт Гензель, который руководствовался идеями Куммера. Гензель, ученик Кронекера, был внуком сестры композитора Мендельсона. Он надеялся посредством p-адических чисел решать вопросы теории чисел и немало в этом преуспел. Впрочем, метрика и сходимость p-адических чисел была совершенно непонятна Гензелю и его современникам.

Гензель доказал, что любое вещественное число можно представить как сумму ряда, который будет сходиться в $\mathbb{Z}_p$; изучая p-адическую сумму этого ряда, он дал несколько ошибочных доказательств теорем о вещественных числах. Например, Гензель представил e^p как сумму сходящегося p-адического ряда и вывел отсюда неправильное доказательство трансцендентности числа e.

p-адические числа были концептуально не поняты вплоть до 1910-х гг., когда Фреше и Рисс (Riesz) изобрели метрические пространства, обосновав неясные рассуждения Гензеля.

В 1912 г. венгерский математик Йожеф Кюршак (József Kürschák, 1864—1933) изобрел нормирования на кольце, обобщив p-адические нормы. В 1917 году Александр Маркович Островский (1893—1986), ученик Гензеля, дал полную классификацию норм на поле $\mathbb{Q}$. Оказалось, что нормы на поле $\mathbb{Q}$ исчерпываются p-адическими (с точностью до возведения в степень) и обычной (евклидовой) нормой (также с точностью до возведения в степень). Набросок доказательства теоремы Островского приведен в задачах.

1.5. Библиография, замечания

p-адические числа — центральное понятие большинства курсов теории чисел. Теория метрических пространств и пополнение вводятся в начале многих хороших курсов анализа, например В. А. Зорича, Лорана Шварца, и А. А. Кириллова и А. Д. Гвишиани; также их изучают в матшкольном курсе анализа и геометрии. Матричные группы над p-адическими полями чрезвычайно важны в теории представлений. В. С. Владимиров и его соавторы написали много трудов о применении p-адического анализа в математической физике и теории струн.

Вот некоторые книжки, которые могут пригодиться.

- Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. — М.: Мир, 1982.
- Серр Ж.-П. Курс арифметики. — М.: Мир, 1972.
- Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979.
- Электронная библиотека учебников по p-адическим числам: `http://www.fen.bilkent.edu.tr/~franz/LN/LN-padic.html`.

Лекция 2

НОРМИРОВАНИЯ В ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

2.1. Примеры нормированных пространств

В этом разделе все векторные пространства предполагаются заданными над $\mathbb{R}$.

Определение 2.1. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\nu\colon V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ — функция со значениями в множестве неотрицательных чисел. Тогда ν называется *нормой* на V, если для любых $v, v' \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия.

Невырожденность: $\nu(v) > 0$, если $v \neq 0$.
Неравенство треугольника: $\nu(v+v') \leqslant \nu(v) + \nu(v')$.
Инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda v) = |\lambda|\,\nu(v)$.

В такой ситуации V называется *нормированным пространством*.

Заметим, что из инвариантности относительно гомотетии следует, что $\nu(0) = 0$ и $\nu(-x) = \nu(x)$. Поэтому ν является нормой на группе V.

Пример 2.2. Пусть $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определим

$$|v|_{L^\infty} := \max |x_i|.$$

Докажите, что это норма.

Пусть $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определим

$$|v|_{L^1} := \sum |x_i|.$$

Докажите, что это норма.

Пусть $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определим

$$|v|_{L^2} := \sqrt{\sum x_i^2}.$$

Этой формулой определяется обычная евклидова норма; то, что она действительно является нормой, доказано ниже.

На одномерном пространстве норма единственна с точностью до умножения на число: $x \to c|x|$.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889)

Норма $|\cdot|_{L^2}$ называется обычной или *евклидовой* нормой на векторном пространстве. Неравенство треугольника для евклидовой нормы называется *неравенством Коши—Буняковского*. В нерусскоязычной литературе оно же называется *неравенством Коши—Шварца* (Cauchy—Schwarz inequality). Чтобы его доказать, возьмем два ненулевых неколлинеарных вектора x, y в векторном пространстве с положительно определенным скалярным произведением g; неравенство треугольника для $|\cdot|_{L^2}$ будет следовать из неравенства

$$\sqrt{g(x,x)}+\sqrt{g(y,y)} \geqslant \sqrt{g(x+y,x+y)}.$$

Возведя обе части в квадрат и раскрыв скобки, получим, что это неравенство равносильно такому:

$$\sqrt{g(x,x)g(y,y)} \geqslant g(x,y). \tag{2.1.1}$$

С другой стороны, из неравенства $g(x-\lambda y, x-\lambda y)>0$ следует, что квадратичный полином

$$P(\lambda) := g(x,x)-2\lambda g(x,y)+\lambda^2 g(y,y)$$

не имеет корней. Значит, его дискриминант

$$D = g(x,y)^2-g(x,x)g(y,y)$$

отрицателен. Это доказывает неравенство (2.1.1).

В качестве альтернативного метода заметим, что на двумерном пространстве, порожденном векторами x, y, можно ввести координаты таким образом, что положительно определенная квадратичная форма g будет стандартной:

$$g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Тогда неравенство треугольника следует из того, что (как известно из школьной планиметрии)

$$g(x, y) = |x||y| \cos\alpha \leqslant |x||y| = \sqrt{g(x, x) g(y, y)},$$

где α есть угол между векторами x и y.

Норма на пространстве задает метрику по формуле

$$d_\nu(x, y) = \nu(x - y).$$

Это та же самая формула, которая используется для колец, полей, групп и т. д.

Определение 2.3. Напомним, что подмножество Z векторного пространства V называется *выпуклым*, если для любых точек $x, y \in Z$ оно содержит отрезок $[x, y]$ целиком.

Утверждение 2.4. *Пусть ν — норма на векторном пространстве. Тогда единичный шар с центром в нуле*

$$B_1(0) := \{x \in V : \ \nu(x) < 1\}$$

выпуклый.

Доказательство. Напомним, что отрезок $[x, y]$ — это множество точек вида $\lambda x + (1-\lambda) y$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ — вещественное число. Можно считать это определением отрезка. Выпуклость шара $B_1(0)$ означает, что

$$\nu(\lambda x + (1-\lambda) y) < 1,$$

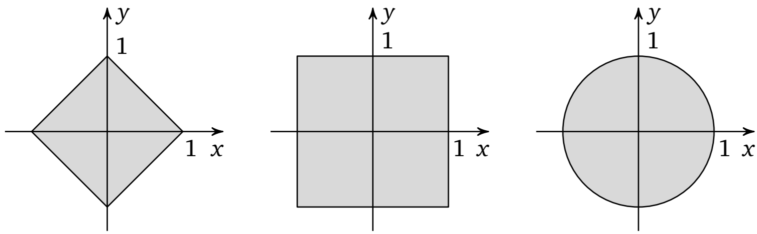
если $\nu(x) < 1$, $\nu(y) < 1$ и $\lambda \in [0, 1]$. В силу неравенства треугольника и мультипликативности нормы имеем

$$\nu(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \nu(\lambda x) + \nu((1-\lambda) y) \leqslant \lambda \nu(x) + (1-\lambda) \nu(y) \leqslant 1$$

(последнее неравенство следует из того, что $\nu(x) < 1$, $\nu(y) < 1$). $\square$

Чтобы убедиться в выпуклости единичного шара в нормах $|\cdot|_{L^1}$, $|\cdot|_{L^\infty}$, $|\cdot|_{L^2}$, можно его нарисовать, что сделать очень легко.

Единичный шар в $\mathbb{R}^2$



в L^1-норме | в L^∞-норме | в L^2-норме (евклидовой)

Евклидова норма выделяется из всех прочих тем, что у нее группа изометрий самая большая. Чтобы доказать это (и даже сформулировать), необходимо разобраться с тем, что такое «размер» (размерность) группы. Но даже на приведенной выше картинке видно, что у единичной сферы в $|\cdot|_{L^2}$ нет выделенных частей и группа движений (изометрий) действует на ней транзитивно (переводя любую точку в любую), а в единичной сфере для $|\cdot|_{L^1}$ и $|\cdot|_{L^\infty}$ особыми точками являются углы квадратов.

Нормы L^1, L^2, L^∞ — часть непрерывной системы норм на $\mathbb{R}^n$, которые определяются следующим образом. Пусть $v = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка $\mathbb{R}^n$, а p — вещественное число, $p \geqslant 1$. Определим L^p-норму формулой

$$|v|_{L^p} := \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}.$$

Неравенство треугольника для этой нормы называется *неравенством Минковского*; его доказательство довольно трудоемко.

Для пространства непрерывных функций на отрезке или k-мерном кубе можно определить L^p-нормы, $p \geqslant 1$, формулами

$$|f|_{L^p} = \sqrt[p]{\int_M |f|^p}$$

и

$$|f|_{L^\infty} = \sup_M |f|.$$

Супремум $|f|$ конечен и интегралы от $|f|^p$ определены, потому что непрерывная функция достигает максимума на отрезке (и любом компакте), а значит, ограничена. Неравенство треугольника для L^1-, L^2- и L^∞-норм в этой ситуации доказывается элементарно (докажите).

2.2. Непрерывные отображения

Определение 2.5. Подмножество $Z \subset M$ метрического пространства называется *открытым*, если верны следующие равносильные условия (докажите равносильность):

1) оно является объединением ε-шаров;

2) вместе с каждой точкой $z \in Z$ оно содержит целиком некоторый ε-шар с центром в этой точке.

Определение 2.6. Пусть $\{z_i\}$ — последовательность точек в метрическом пространстве (M, d). Мы говорим, что $\{z_i\}$ *сходится к* z, если $\lim\limits_{i\to\infty} d(z_i, z) = 0$.

Определение 2.7. Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) — метрические пространства, а $f : M_1 \to M_2$ — некоторое отображение. Оно называется *непрерывным*, если верны следующие равносильные условия (докажите равносильность):

1) отображение f *сохраняет пределы*: если последовательность $\{z_i\}$ сходится к z, то $\{f(z_i)\}$ сходится к $f(z)$;

2) для каждой точки $z \in M$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $d_1(x, z) < \delta$ следует, что $d_2(f(x), f(z)) < \varepsilon$;

3) прообраз любого открытого множества открыт.

Композиция непрерывных отображений, очевидно, непрерывна.

Замечание 2.8. Непрерывное отображение совершенно не обязано переводить последовательности Коши в последовательности Коши. Рассмотрим, например, отображение $\varphi : \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$, переводящее все числа, большие $\sqrt{2}$, в 1, а все числа, меньшие $\sqrt{2}$, в 0. В множестве $\{0, 1\}$ четыре открытых подмножества: $\{0\}$, $\{1\}$, пустое множество и все $\{0, 1\}$; легко видеть, что прообраз каждого из них открыт.

Пример 2.9. Пусть z — точка метрического пространства M. Тогда $d_z : x \to d(z, x)$ является непрерывным отображением из M в $\mathbb{R}$ с евклидовой метрикой. Действительно, из неравенства треугольника сразу следует, что $d_z(x) - d_z(y) \leqslant d(x, y)$.

Определение 2.10. Отображение метрических пространств называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, биективно и обратное ему тоже непрерывно.

Две нормы ν и ν' на векторном пространстве V называются *эквивалентными*, если тождественное отображение задает гомеоморфизм $(V, \nu) \to (V, \nu')$.

Непрерывность тождественного отображения $(V, \nu) \to (V, \nu')$ значит, что некоторый открытый шар в норме ν' содержит открытый шар в норме ν. Если первый шар имеет радиус r, второй шар — радиус s, то шар радиуса 1 в (V, ν') содержит шар радиуса s/r в норме ν. Иначе говоря, из того, что $\nu'(x) \leqslant 1$, следует, что $\nu(x) \leqslant s/r$. Это равносильно такому неравенству: $\dfrac{\nu(x)}{\nu'(x)} \leqslant \dfrac{s}{r}$. Из непрерывности отображения $(V, \nu') \to (V, \nu)$ следует противоположное неравенство (с другим коэффициентом). Мы получили такое утверждение.

Утверждение 2.11. *Пусть ν и ν' — нормы на векторном пространстве V. Эти нормы эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа C_1, C_2, что для любого $x \in V$ выполнены неравенства*

$$C_1 \nu(x) \leqslant \nu'(x) \leqslant C_2 \nu(x). \tag{2.2.1}$$

□

Докажем следующую полезную теорему.

Теорема 2.12. *На конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Заметим, что эквивалентность норм L^1, L^2, L^∞ на $\mathbb{R}^2$ вполне очевидна из чертежа, на котором нарисован единичный шар (см. с. 162).

Пусть ν — произвольная норма на $V = \mathbb{R}^n$, $|\cdot|_{L^1}$ — L^1-норма, а $x_1, \ldots, x_n$ — стандартный базис в V. Воспользовавшись неравенством треугольника, получаем

$$\nu(z) \leqslant \sum_i |\lambda_i| \nu(x_i) \leqslant \max_i \nu(x_i) \sum_i |\lambda_i| = C|z|_{L^1},$$

где $z = \sum\limits_i \lambda_i x_i$, а $C = \max_i \nu(x_i)$. Это дает одно из двух неравенств (2.2.1), нужных для эквивалентности норм. Мы получили, что тождественное отображение $\mathrm{Id}\colon (V, |\cdot|_{L^1}) \to (V, \nu)$ непрерывно.

Чтобы доказать, что обратное отображение тоже непрерывно, воспользуемся компактностью. Подробнее про компактность я расскажу в лекции 5.

Напомним, что (секвенциально) компактным подмножеством в метрическом пространстве называется множество, в котором из каждой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Замкнутым подмножеством называется такое подмножество, дополнение до которого открыто. Из курса анализа известно, что в $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой каждое замкнутое ограниченное[1] подмножество компактно. Также известно, что непрерывная функция на компакте достигает максимального и минимального значений. Мы передокажем эти утверждения в одной из следующих лекций.

Функция $\nu\colon V\to\mathbb{R}$ непрерывна относительно метрики, заданной этой функцией (пример 2.9). В силу непрерывности отображения $\mathrm{Id}\colon (V, |\cdot|_{L^1})\to(V, \nu)$ эта функция непрерывна на V с L^1-метрикой. Поэтому она достигает минимума C_1 на единичной сфере относительно этой метрики[2]. Поскольку ν положительна на ненулевых векторах, C_1 тоже положительно. Мы получили неравенство $\nu(v)\geqslant C_1|v|_{L^1}$. Неравенство $\nu(v)\leqslant C|v|_{L^1}$ получено выше. Мы доказали эквивалентность норм на V. $\square$

2.3. Выпуклые множества и норма

Пусть V — конечномерное векторное пространство, ν — норма на нем, а B — единичный шар. Как мы видели, B — ограниченное (содержащееся в евклидовом шаре большого радиуса) открытое выпуклое множество. Оказывается, каждое такое множество задает некоторую норму.

Теорема 2.13. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, а B — непустое открытое выпуклое ограниченное подмножество в V. Предположим, что B центрально симметрично, т. е. для каждого $v\in B$ точка $-v$ тоже лежит в B. Тогда B является единичным шаром для какой-то нормы.*

Доказательство. Для любых множеств $A, B\subset V$ определим $A+B\subset V$ как множество всех векторов вида $a+b$, $a\in A$, $b\in B$. Для $\lambda\in\mathbb{R}$ определим λA как множество всех векторов вида λa, $a\in A$.

Выпуклость множества B равносильна условию $\lambda B+(1-\lambda)B\subset B$, где λ — произвольное число от 0 до 1 (докажите это). Поэтому для выпуклого B мы имеем $\alpha B+\beta B\subset(\alpha+\beta)B$.

Определим функцию $\nu_B\colon V\to\mathbb{R}$ формулой

$$\nu_B(x) := \inf_\rho\{\rho > 0\colon\ x\in\rho B\}.$$

1 Ограниченное — значит содержащееся в каком-то шаре.

2 Нетрудно видеть, что единичная сфера в L^1-метрике является границей правильного гипероктаэдра с вершинами в центрах граней единичного куба.

Поскольку B открыто и содержит 0, это множество непусто, а поскольку оно ограниченно, $\nu_B(x) \neq 0$ для ненулевого x. Условие $\nu_B(\lambda x) = |\lambda| \nu_B(x)$ следует прямо из определения. Наконец, неравенство треугольника вытекает из того, что $\alpha B + \beta B \subset (\alpha + \beta)B$. Действительно, пусть x, y — такие векторы, что $x \in (\alpha + \varepsilon)B$ и $y \in \in (\beta + \varepsilon)B$. Тогда $x + y \in (\alpha + \beta + 2\varepsilon)B$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ из того, что $\nu_B(x) = \alpha$, $\nu_B(y) = \alpha$, следует, что $\nu(x + y) \leqslant \alpha + \beta + 2\varepsilon$. Это доказывает неравенство треугольника. Мы построили норму ν_B по выпуклому ограниченному открытому центрально-симметричному множеству B. Легко видеть, что единичный шар в ν_B — это и есть B. □

2.4. История, замечания

Основы теории нормированных векторных пространств излагаются в любом хорошем учебнике анализа. Особенно рекомендуем для этой цели двухтомный «Анализ» Л. Шварца и учебник В. А. Зорича.

Неравенство Коши—Буняковского в конечномерных векторных пространствах доказал Огюстен Коши (Augustin Cauchy) в 1821 г. В пространствах функций это неравенство доказал Виктор Яковлевич Буняковский в 1859 г.; в 1888 г. результат Буняковского передоказал Герман Шварц (Hermann Amandus Schwarz), ученик Вейерштрасса, один из основателей комплексного анализа, в честь которого названы лемма Шварца из комплексного анализа, производная Шварца и много других вещей.

Понятие метрического пространства изобрел Фреше, оно используется в его диссертации 1906 года. В 1909 г. Фридьеш Рисс (Frigyes Riesz) обнаружил, что понятие метрики для изучения топологии пространства необязательно, и предложил определение топологии, основанное на понятии замыкания. Его система аксиом была непохожа на современную, но в 1914 г. Хаусдорф опубликовал монографию «Grundzüge der Mengenlehre», где развил аксиоматическую теорию топологических пространств, практически тождественную современной.

Любопытно, что многие идеи монографии Хаусдорфа можно обнаружить в его литературных и философских работах, опубликованных в конце XIX века под псевдонимом Поль Монгре (Paul Mongré).

Стефан Банах (Stefan Banach, 1892—1945)

Термин «компактное пространство» также принадлежит Фреше. Метрика L^p определена Риссом в 1910 г.

Понятие нормированного пространства определил и детально исследовал Банах в начале 1920-х гг.

Лекция 3

КОМПАКТЫ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

3.1. Теорема Гейне—Бореля

Пусть M — метрическое пространство. Напомним, что открытое подмножество в M — это объединение любого числа открытых шаров. Ясно, что объединение любого числа открытых подмножеств открыто.

Определение 3.1. Набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$ в M называется *покрытием M*, если $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. *Подпокрытием* покрытия $\{U_\alpha\}$ называется подмножество $\{U_\alpha\}$, которое тоже является покрытием.

Определение 3.2. Пространство M называется *компактным*, если из любого его покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение 3.3. Пространство M называется *секвенциально компактным*, если любая последовательность точек $\{x_i\}$ в M имеет сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 3.4 (теорема Гейне—Бореля). *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Доказательство. Вывести из обычной компактности секвенциальную несложно. Напомним, что *окрестностью* точки $x \in M$ называется любое открытое множество, содержащее x.

Если последовательность $\{x_i\}$ содержит только конечное число точек, то какая-то из них повторяется бесконечное число раз и доказывать нечего. Пусть $\{x_i\}$ — последовательность, не имеющая предельных точек.

Для каждого $x \notin \{x_i\}$ некоторая окрестность точки x не содержит элементов последовательности. Объединение U всех таких окрестностей открыто и совпадает с дополнением $M \setminus \{x_i\}$. Взяв у каждого x_i окрестность U_i, которая не содержит других элементов последовательности $\{x_i\}$, получим покрытие $\{U, U_i\}$, которое не содержит конечного подпокрытия.

Доказательство импликации[1]

(секвекциальная компактность) $\Rightarrow$ (обычная компактность)

более трудоемко. Нам понадобятся две леммы.

Лемма 3.5. *Пусть M — секвенциально компактное метрическое пространство, а $f: M \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. Тогда супремум и инфимум функции f на M конечны. Более того, есть точки x, y, для которых*

$$f(x) = \sup_{z \in M} f(z), \quad f(y) = \inf_{z \in M} f(z).$$

Доказательство. Пусть $\{x_i\}$ — такая последовательность точек, что

$$\lim f(x_i) = \sup_{z \in M} f(z).$$

Из секвенциальной компактности следует, что $\{x_i\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_i'\}$. Обозначим ее предел через x. Поскольку функция f непрерывна, она сохраняет пределы последовательностей, и поэтому $\lim f(x_i') = f(x)$. Мы доказали, что $f(x) = \sup\limits_{z \in M} f(z)$. Доказательство для инфимума аналогично. $\square$

Напомним, что в листке 2 мы определили так называемые липшицевы отображения. Липшицевы отображения названы в честь немецкого математика Рудольфа Липшица, ученика Дирихле.

Примером C-липшицевой функции является дифференцируемая функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой $|f'| \leqslant C$ (докажите).

Напомним, что $B_\rho(x)$ обозначает открытый шар радиуса ρ с центром в x.

Лемма 3.6. *Пусть M — метрическое пространство, а $\mathscr{U} := \{U_\alpha\}$ его покрытие. Рассмотрим функцию*

$$\rho_{\mathscr{U}}(x) := \sup_{\rho}\{\rho \in \mathbb{R} : B_\rho(x) \text{ содержится в одном из элементов покрытия } \mathscr{U}\}.$$

Предположим, что $\rho_U(x) \neq \infty$ для какой-то точки $x \in M$.[2]

Тогда функция $\rho_{\mathscr{U}}$ является 1-липшицевой.

1 Заключение вида «из утверждения A следует утверждение B» называется импликацией.

2 Если $\rho_U(x) = \infty$ в одной точке, то это же верно для любой другой точки.

Рудольф Отто Сигизмунд Липшиц
(Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832—1903)

Доказательство. Пусть $y \in M$ — точка, отстоящая от x не более чем на ε, а $\rho_{\mathcal{U}}(x) > \rho_0$. В этом случае открытый шар $B_{\rho_0}(x)$ целиком содержится в одном из элементов покрытия $\mathcal{U}$. Из неравенства треугольника следует, что $B_{\rho_0-\varepsilon}(y) \subset B_{\rho_0}(x)$ (докажите). Поэтому

$$\rho_{\mathcal{U}}(y) \geqslant \rho_{\mathcal{U}}(x) - d(x, y).$$

Выписывая аналогичное неравенство для пары (y, x), получаем

$$d(x, y) \geqslant |\rho_{\mathcal{U}}(y) - \rho_{\mathcal{U}}(x)|. \qquad \square$$

Напомним, что ранее мы ввели понятие ε-сети (см. определение 2.3).

Легко убедиться, что в секвенциальном компакте есть конечная ε-сеть для каждого $\varepsilon > 0$. Действительно, если такой сети нет, то найдется такая бесконечная последовательность точек $\{x_i\}$, что никакая точка x_i не лежит в объединении ε-шаров с центрами во всех предыдущих точках. Но такая последовательность не может содержать сходящейся подпоследовательности, потому что $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ для всех $i \neq j$.

Вернемся к доказательству теоремы Гейне—Бореля.

Пусть M — секвенциально компактное метрическое пространство, а $\mathscr{U} := \{U_\alpha\}$ — некоторое покрытие. Для доказательства теоремы Гейне—Бореля нужно показать, что у $\mathscr{U}$ есть конечное подпокрытие.

Рассмотрим функцию $\rho_{\mathscr{U}} : M \to \mathbb{R}$, определенную выше. Поскольку непрерывная функция на секвенциальном компакте достигает минимума, а $\rho_{\mathscr{U}}$ во всех точках положительна, имеем $\rho_{\mathscr{U}} \geqslant \rho_{\min} > 0$. Это значит, что для каждой точки $x \in M$ шар радиуса $\rho_{\min}$ с центром в x содержится в одном из элементов покрытия $\mathscr{U}$.

Возьмем в M конечную $\rho_{\min}$-сеть V, и пусть $\{B_i\}$ — шары радиуса $\rho_{\min}$ с центрами в точках их V. По определению $\rho_{\min}$, каждый из этих шаров содержится в некотором элементе U_i покрытия $\mathscr{U}$. Мы получаем

$$M = \bigcup B_i \subset \bigcup U_i,$$

а значит, $\{U_i\}$ — конечное подпокрытие $\mathscr{U}$. Мы доказали теорему Гейне—Бореля. $\square$

Эмиль Борель (Émile Borel, 1871—1956)

Исторически теорему Гейне—Бореля формулировали так: «каждое замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ компактно». Обобщение ее на метрические пространства принадлежит, вероятно, П. С. Александрову и П. С. Урысону, определившим компактные пространства (они называли их «бикомпактные») в терминах покрытий и подпокрытий.

Самое раннее доказательство теоремы Гейне—Бореля (для подмножеств прямой $\mathbb{R}$) принадлежит Дирихле (1862). Ученик Дирихле Генрих Эдуард Гейне (Heinrich Eduard Heine, 1821—1881) опубликовал доказательство (для подмножеств прямой) в 1872 году. В 1895 г. Эмиль Борель доказал, что любое *счетное* покрытие замкнутого ограниченного подмножества $\mathbb{R}^n$ имеет конечное подпокрытие. Для несчетных покрытий доказательство было получено пятью годами позже Шёнфлисом (Arthur Moritz Schönflies, 1900) и Лебегом (1898, опубликовано в 1904 г.). Во франкоязычной литературе теорему Гейне—Бореля называют «теорема Бореля—Лебега».

3.2. Историческое отступление: работы Хаусдорфа

Метрические пространства были изобретены Фреше в 1906 г. для изучения топологических свойств пространств функций, но на эвристическом уровне понятия топологического пространства и непрерывности встречались еще у Римана. Риман и Фреше понимали, что к пространствам функций можно применять те же геометрические приемы, что и к геометрическим объектам. Фреше надеялся, что теория метрических пространств станет удобным фундаментом для объединения геометрии и теории функций. В работах Банаха по функциональному анализу эта надежда вполне оправдалась, но в геометрии понятие метрического пространства было не слишком употребительно вплоть до 1980-х гг.

В конце XIX века топологическую природу подмножеств прямой изучал Кантор. Ему принадлежат понятия замкнутого и открытого множества, а также ряд полезных классификационных теорем.

Напомним, что 2^M обозначает множество всех подмножеств в M.

Определение 3.7. Пусть M — множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ — набор подмножеств, называемых *открытыми*. Мы говорим, что $\mathcal{U}$ *задает топологию* на M, если

1) любое объединение открытых подмножеств открыто;

2) любое конечное пересечение открытых подмножеств открыто;

3) само M и пустое множество $\varnothing$ открыты.

В такой ситуации M называется *топологическим пространством*.

Оказалось, что этой простой формальной структуры вполне достаточно для определения ключевых понятий топологии множеств: непрерывного отображения, предела, замыкания, предельных точек и так далее. Подробнее я расскажу об этом в следующих лекциях.

В первой половине XX века математики весьма интересовались формальными следствиями простых аксиоматических систем, и изучение топологии на много лет свелось к изучению общих (как правило, весьма экзотических) топологических пространств. Эту деятельность называют «общей топологией» (point-set topology). На сайте `arxiv.org` «общей топологии» посвящена отдельная категория math.GN; там можно посмотреть все статьи за какой-нибудь год, например `http://arxiv.org/list/math.GN/07`. Их немного: мало кто занимается сейчас общей топологией.

Феликс Хаусдорф (Felix Hausdorff, 1868—1942)

Метрика на пространстве задает топологию на нем (открытые множества можно определить как объединения открытых шаров). Топологическое пространство, которое получается таким образом, называется *метризуемым*. Далеко не все теоремы, которые верны в метризуемых пространствах, верны в общей ситуации.

В частности, неверна теорема Гейне—Бореля (равносильность секвенциальной компактности и обычной). Также неверна равносильность непрерывности и секвенциальной непрерывности: даже если отображение сохраняет пределы последовательностей (это называется «секвенциальной непрерывностью»), прообраз открытого множества не обязательно открыт. Из обычной непрерывности (прообразы открытых множеств открыты) можно вывести секвенциальную, но не наоборот.

В такой ситуации довольно часто говорят: «Обычная непрерывность *сильнее* секвенциальной». Утверждение, что одно предположение сильнее другого, означает, что из первого предположения можно вывести второе.

3.3. Расстояние Хаусдорфа

Пусть M — метрическое пространство. Напомним, что подмножество $Z \subset M$ называется *замкнутым*, если его дополнение открыто, и *ограниченным*, если оно содержится в шаре $B_C(x)$ для какого-то $C > 0$.

Расстояние от точки до множества определяется так:

$$d(x, Z) = \inf_{z \in Z} d(x, z).$$

Это непрерывная, 1-липшицева функция на M. Для замкнутого множества $Z \subset M$ имеем $d(x, Z) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in Z$ (докажите).

Для двух замкнутых ограниченных подмножеств Z_1, Z_2 в метрическом пространстве M определим *расстояние Хаусдорфа* $d_H(X, Y)$ формулой

$$d_H(Z_1, Z_2) := \max\Big(\sup_{x \in Z_1} d(x, Z_2), \sup_{x \in Z_2} d(x, Z_1)\Big).$$

Утверждение 3.8. *Функция d_H задает метрику на множестве всех замкнутых ограниченных подмножеств пространства M.*

Доказательство. Супремум $\sup\limits_{x\in Z_1} d(x, Z_2)$ конечен, потому что Z_1 и Z_2 содержатся в некотором шаре $B_C(z)$, а расстояние между точками шара $B_C(z)$ ограничено константой $2C$ (докажите). Если этот супремум равен нулю, это значит, что все точки множества Z_1 лежат в Z_2 и наоборот; это доказывает положительность метрики. Симметричность очевидна. Осталось доказать неравенство треугольника.

Для подмножества $Z\subset M$ и $\varepsilon>0$ определим $Z(\varepsilon)$ (*ε-окрестность множества Z*) как объединение всех ε-шаров с центром в точке $z\in$ $\in Z$. Определение расстояния Хаусдорфа можно переписать так:

$$d(Z_1, Z_2) := \inf_{\varepsilon}\big\{\varepsilon\in\mathbb{R}\colon\ Z_1\subset Z_2(\varepsilon),\ Z_2\subset Z_1(\varepsilon)\big\}.$$

Расстояние Хаусдорфа от Z_1 до Z_2 есть инфимум всех таких ε, что Z_1 лежит в ε-окрестности Z_2, а Z_2 — в ε-окрестности Z_1.

Легко видеть, что

$$Z(\varepsilon)(\varepsilon')\subset Z(\varepsilon+\varepsilon'). \tag{3.3.1}$$

Если $d_H(Z_1, Z_2)<\varepsilon$ и $d_H(Z_2, Z_3)<\varepsilon'$, то Z_1 лежит в ε-окрестности Z_2, а Z_2 в ε'-окрестности Z_3. Из условия $Z_2\subset Z_3(\varepsilon')$, неравенства треугольника и включения (3.3.1) следует, что $Z_2(\varepsilon)\subset Z_3(\varepsilon'+\varepsilon)$. Получаем, что

$$Z_1\subset Z_2(\varepsilon)\subset Z_3(\varepsilon'+\varepsilon).$$

То же самое рассуждение, примененное к Z_3, Z_2 и Z_1, дает

$$Z_1\subset Z_2(\varepsilon)\subset Z_3(\varepsilon'+\varepsilon).$$

Поэтому из неравенств $d_H(Z_1, Z_2)<\varepsilon$ и $d_H(Z_2, Z_3)<\varepsilon'$ следует, что $d_H(Z_1, Z_3)<\varepsilon'+\varepsilon$. Это и есть неравенство треугольника для d_H. Мы доказали, что расстояние Хаусдорфа — метрика. □

3.4. Компактность и ε-сети

Весьма удобный критерий компактности можно получить, воспользовавшись понятием ε-сети.

Замечание 3.9. Пусть M — метрическое пространство, а $\varepsilon>0$ — вещественное число. Подмножество $V\subset M$ называется *ε-сетью*, если верно любое из следующих равносильных утверждений (докажите равносильность):

1) $V(\varepsilon) \supset M$;

2) $d_H(M, V) < \varepsilon$.

Утверждение 3.10. *Полное метрическое пространство M компактно тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε-сеть.*

Доказательство. Наличие конечной ε-сети в каждом компакте M очевидно. Возьмем в качестве покрытия M множество всех ε-шаров. У него есть конечное подпокрытие $\{B_\varepsilon(x_i)\}$. По определению множество $\{x_i\}$ образует конечную ε-сеть.

Пусть, наоборот, в M найдется конечная 2^{-N}-сеть для любого N. Возьмем произвольную последовательность $\{x_i\}$, и пусть V_1 — конечная 2^0-сеть. Тогда бесконечное множество элементов последовательности $\{x_i\}$ лежат в некотором 2^0-шаре. Выкинем из последовательности $\{x_i\}$ все ее элементы, которые в нем не лежат. Перейдем к конечной 2^{-1}-сети и выкинем из $\{x_i\}$ все элементы, которые не лежат в некотором 2^{-1}-шаре, кроме первого. Поступим так же для всех i: на i-м шаге выкинем из $\{x_i\}$ все элементы, не лежащие в некотором 2^{-i}-шаре, кроме первых i. Этот процесс стабилизируется: начиная от N-го шага все элементы последовательности вплоть до N-го выбраны и не меняются. Полученная таким образом последовательность является последовательностью Коши (докажите), а значит, сходится. □

В доказательстве теоремы Хопфа—Ринова в лекции 4 нам понадобится следующий простой результат. Заметим, что любое компактное подмножество метрического пространства замкнуто и ограниченно (докажите). А значит, метрика Хаусдорфа определена на компактных подмножествах.

Утверждение 3.11. *Пусть $\{Z_i\}$ — последовательность компактных подмножеств в полном метрическом пространстве M. Предположим, что $\{Z_i\}$ — последовательность Коши в метрике Хаусдорфа, а Z — ее предел. Тогда Z тоже компактно.*

Доказательство. Поскольку Z — замкнутое подмножество M, оно полно. Для доказательства компактности Z мы построим в Z конечную 3ε-сеть для любого наперед заданного значения ε. Возьмем конечную ε-сеть $x_0, \ldots, x_k$ в Z_i, где $d_H(Z_i, Z) < \varepsilon$, и пусть $z_1, \ldots, z_k$ — такие точки в Z, что $d(z_i, x_i) < \varepsilon$ (такие точки существуют, потому что $d_H(Z_i, Z) < \varepsilon$). Обозначим через V множество $\{x_0, \ldots, x_k\}$. Тогда $V(\varepsilon)$ содержит $x_0, \ldots, x_k$. По определению ε-сети, из этого следует, что $V(2\varepsilon)$ содержит Z_i. А коль скоро $d_H(Z_i, Z) < \varepsilon$, получаем, что $Z_i(\varepsilon) \supset Z$, и, значит, $V(3\varepsilon) \supset Z$. Мы получили, что V есть 3ε-сеть. $\square$

3.5. Историческое отступление: расстояние Громова—Хаусдорфа

В 1920-е годы общую топологию немало изучали в Москве П. С. Урысон (к сожалению, рано погибший), П. С. Александров и их школа, а в Польше Казимеж Куратовский (Kazimierz Kuratowski), Альфред Тарский (Alfred Tarski) и Вацлав Серпинский (Waclaw Sierpiński). Среди прочего их интересовала *проблема метризации*: найти, какие топологические пространства получаются из метрических забыванием метрики. Довольно скоро эти исследования исчерпали себя, и метрическими пространствами (вне функционального анализа) практически не занимались.

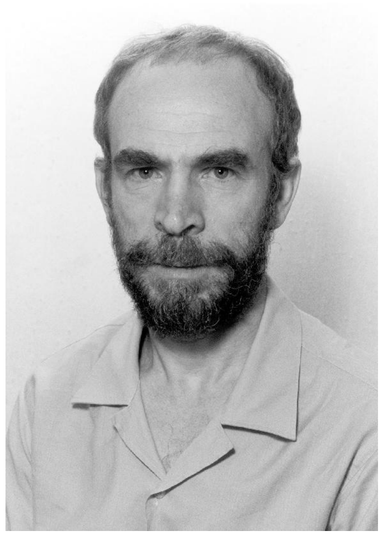
В дифференциальной геометрии много изучали геометрию римановых многообразий (метрических пространств, локально гомеоморфных $\mathbb{R}^n$ и с метрикой, которая в первом приближении евклидова и гладко зависит от точки). Более общими пространствами дифференциальные геометры практически не интересовались.

Замечательным исключением были работы А. Д. Александрова и математиков его школы, среди которых наиболее знаменит Михаил Громов.

Громов определил метрику на множестве всех компактных метрических пространств. Пусть Z_1, Z_2 — компактные метрические пространства, изометрически вложенные в третье метрическое пространство M (такие вложения существуют по теореме Урысона). Рассмотрим $\inf d_H(Z_1, Z_2)$ для всех таких вложений. Немножко повозившись, можно доказать, что это действительно метрика.

В такой ситуации можно говорить о сходимости и пределе метрических пространств («предел Громова—Хаусдорфа»). Эта идея оказалась неожиданно полезной в топологии и дифференциальной геометрии. Довольно большие классы пространств оказались компактными в метрике, заданной Громовым—Хаусдорфом; из этого удалось вывести много важных ограничений на топологические инварианты многообразий.

В 2000-е годы геометрия метрических пространств получила дополнительный толчок. Григорий Перельман, изучая эволюцию



Михаил Громов (р. 23 декабря 1943)

сложного дифференциально-геометрического уравнения (потока Риччи), смог классифицировать вырождения решений этого уравнения. Он обнаружил, что в громовском пределе пространство, на котором оно определено, становится из многообразия негладким метрическим пространством. Оказалось, что это предельное метрическое пространство устроено довольно просто. Вырезав из него особые точки и заклеив их пленками, Перельман снова получил гладкое многообразие и продолжил на нем эволюцию потока Риччи, получив в пределе многообразие, где этот поток стабилен. Такие пространства (с постоянной кривизной Риччи) были давно классифицированы. Таким образом Перельман доказал гипотезу Пуанкаре.

Лекция 4

ВНУТРЕННЯЯ МЕТРИКА

4.1. Пространство с внутренней метрикой

Пусть M — метрическое пространство, а $\gamma\colon [0,\alpha]\to M$ — непрерывное отображение из отрезка. Такое отображение называется *путем из $\gamma(0)$ в $\gamma(\alpha)$*, а $\gamma(0)$ и $\gamma(\alpha)$ — *началом* и *концом* пути γ, а также его *концами*.

Рассмотрим разбиение отрезка $[0,\alpha]$ в объединение меньших отрезочков:

$$[0,\alpha]=[0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\ldots\cup[x_{n-1},\alpha].$$

Для простоты обозначим $x_0:=0$, $x_n:=\alpha$. Пусть

$$L_\gamma(x_1,\ldots x_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(x_i),\gamma(x_{i+1})).$$

Определение 4.1. *Длиной* пути γ называется супремум

$$L(\gamma):=\sup_{x_1,\ldots,x_{n-1}} L_\gamma(x_1,\ldots x_{n-1}),$$

взятый по всем разбиениям отрезка.

Конечно, такой супремум может быть равен бесконечности, но длина C-липшицева пути $\gamma\colon[0,\alpha]\to M$ не превосходит $C\alpha$ (докажите). Также ясно, что $L(\gamma)\geqslant d(x,y)$, где x, y — концы пути γ (выведите это из неравенства треугольника).

Предположим, что для любых точек x, y метрического пространства M найдется путь γ конечной длины, соединяющий x и y. Легко видеть, что в таком случае инфимум $L(\gamma)$ (длина кратчайшего пути от x до y) по всем таким путям задает метрику на M (докажите).

Метрика на M называется *внутренней метрикой* (intrinsic metric), если этот инфимум равен $d(x,y)$.

Пусть M — метрическое пространство, между любыми двумя точками которого есть путь конечной длины. Легко видеть, что функция, ставящая в соответствие паре точек x, y в M инфимум длины путей из x в y, является внутренней метрикой (проверьте это).

Внутренняя метрика отличается следующим свойством.

Условие Хопфа—Ринова. Пусть M — пространство с внутренней метрикой. Для любых точек $x, y \in M$ и любого положительного $r < d(x, y)$ имеем

$$d(y, B_r(x)) = d(x, y) - r.$$

Замечание 4.2. Нетрудно доказать, что это условие равносильно условию на расстояние между шарами: если $X = B_r(x)$, $Y = B_s(y)$, то $\inf\limits_{a\in X,\, b\in Y} d(a, b) = d(x, y) - r - s$ для любых $s, r > 0$, удовлетворяющих условию $s + r < d(x, y)$ (определение 2.15 из части II).

Докажем это равенство.

Доказательство. Заметим, что неравенство

$$d(y, B_r(x)) \geqslant d(x, y) - r$$

имеет место в произвольном метрическом пространстве и следует из неравенства треугольника (докажите). Поэтому для доказательства условия Хопфа—Ринова нужно доказать неравенство $d(y, B_r(x)) \leqslant d(x, y) - r$.

Пусть $\gamma\colon [0, 1] \to M$ — путь из x в y длины, не превосходящей $d(x, y) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Такой путь существует, потому что метрика внутренняя. Из определения $L(\gamma)$ ясно, что

$$d(x, z) + d(z, y) \leqslant d(x, y) + \varepsilon \tag{4.1.1}$$

для любого z в образе пути γ (докажите).

Рассмотрим функцию $d_\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $d_\gamma(t) := d(x, \gamma(t))$. Поскольку она непрерывна и $d_\gamma(0) = 0$, $d_\gamma(1) = d(x, y) + \varepsilon$, каждая точка отрезка $[0, d(x, y) + \varepsilon]$ имеет прообраз. Возьмем такое t_0, что $d_\gamma(t_0) = r - \varepsilon$. Тогда $z := \gamma(t_0)$ лежит в шаре $B_r(x)$. В силу неравенства (4.1.1) имеем

$$d(y, z) \leqslant d(x, y) + \varepsilon - d(x, z) = d(x, y) + \varepsilon - d_\gamma(t_0) = d(x, y) - r + 2\varepsilon.$$

Поэтому $d(y, B_r(x)) \leqslant d(x, y) - r + 2\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Мы доказали условие Хопфа—Ринова. □

Заметим, что не любое метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа—Ринова, обладает внутренней метрикой. Легко видеть, что никаких непостоянных непрерывных отображений из отрезка в рациональные числа нет, а между тем рациональные числа с обычной метрикой удовлетворяют условию Хопфа—Ринова (докажите это).

4.2. Локально компактные метрические пространства

Напомним, что *открытыми множествами* в метрическом пространстве называются произвольные объединения открытых шаров, а *замкнутыми множествами* — дополнения открытых множеств.

Пусть M — метрическое пространство, $x \in M$ — точка, $r > 0$ — вещественное число. Множество $\overline{B}_r(x) := \{y \in M : d(x, y) \leqslant r\}$ называется *замкнутым шаром радиуса r с центром в x*. Это множество замкнуто. Действительно, для каждой точки $y \notin \overline{B}_r(x)$ имеем $d(x, y) > r$, и открытый шар $B_\varepsilon(y)$ не пересекается с $\overline{B}_r(x)$ для любого $\varepsilon \leqslant d(x, y) - r$ (выведите это из неравенства треугольника).

Напомним, что *замыканием* множества Z называется множество предельных точек всех последовательностей, лежащих в Z. Легко видеть, что замыкание всякого множества замкнуто (докажите).

Вообще говоря, замыкание открытого шара $B_r(x)$ не равно замкнутому шару $\overline{B}_r(x)$. Возьмем в качестве M пространство с метрикой $d(x, y) = 1$ для всех $x \neq y$; тогда открытый шар $B_1(x)$ — это точка x, а замкнутый шар — всё M.

Если M удовлетворяет условию Хопфа—Ринова, то замыкание шара $B_r(x)$ — это $\overline{B}_r(x)$. Действительно, возьмем любую точку $y \in \overline{B}_r(x)$. Из условия Хопфа—Ринова легко вывести, что $d(y, B_r(x)) = 0$ (выведите это). Но тогда некоторая последовательность точек $B_r(x)$ сходится к y, а значит, y лежит в замыкании шара $B_r(x)$.

Определение 4.3. Метрическое пространство M называется *локально компактным*, если для каждой точки $x \in M$ найдется такое число $r > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_r(x)$ компактен.

Напомним, что *ограниченным подмножеством* метрического пространства называется подмножество, которое содержится в каком-то шаре $B_C(x)$.

Теорема 4.4 (теорема Хопфа—Ринова, часть 1)**.** *Пусть M — локально компактное метрическое пространство с условием Хопфа—Ринова. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *M полно;*

2) *любое замкнутое ограниченное подмножество M компактно.*

Доказательство. Следствие 2) $\Rightarrow$ 1) вполне очевидно. Действительно, любая последовательность Коши $\{x_i\}$ содержится в замкнутом шаре, который компактен по условию 2, значит, $\{x_i\}$ сходится.

Осталось доказать, что в полном локально компактном метрическом пространстве с условием Хопфа—Ринова любое замкнутое ограниченное подмножество компактно.

Шаг 1. Поскольку замкнутое подмножество компакта компактно (докажите), для утверждения теоремы Хопфа—Ринова достаточно доказать, что любой замкнутый шар в M компактен.

Шаг 2. Рассмотрим функцию $\rho : M \to \mathbb{R}$,

$$\rho(x) := \sup_r \{r \in \mathbb{R} : \ \overline{B}_r(x) \text{ компактен}\}.$$

Если ρ бесконечно в одной точке x, это значит, что любой замкнутый шар с центром в x компактен. Из этого легко следует, что все замкнутые шары в M компактны (докажите это). Поэтому можно считать, что функция ρ везде конечна.

Легко видеть, что функция ρ является 1-липшицевой, а следовательно, непрерывна. Действительно, $\overline{B}_{r-d(x,y)}(y) \subset \overline{B}_r(x)$ (выведите это из неравенства треугольника). Поэтому $|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant d(x, y)$.

Шаг 3. Докажем теперь, что замкнутый шар $\overline{B}_{\rho(x)}(x)$ компактен. Априори это может быть и не так, ведь в определении $\rho(x)$ используется супремум, поэтому из этого определения следует лишь то, что $\overline{B}_r(x)$ компактен для всех $r < \rho(x)$.

Из условия Хопфа—Ринова вытекает, что $B_r(x)(\varepsilon) = B_{r+\varepsilon}(x)$, где, как и ранее, $Z(\varepsilon)$ обозначает объединение всех открытых ε-шаров с центрами в множестве Z. Это позволяет вычислить расстояние Хаусдорфа между шарами $\overline{B}_r(x)$ и $\overline{B}_{r+\varepsilon}(x)$:

$$d_H(\overline{B}_r(x), \overline{B}_{r+\varepsilon}(x)) = \varepsilon.$$

Из этого очевидно, что для каждой последовательности $\{r_i\}$, сходящейся к r, последовательность замкнутых шаров $\overline{B}_{r_i}(x)$ является последовательностью Коши (в смысле метрики Хаусдорфа) и сходится к $\overline{B}_r(x)$.

Возьмем последовательность $r_i < \rho(x)$, сходящуюся к $\rho(x)$. Замкнутый шар $\overline{B}_{\rho(x)}(x)$ получается как предел последовательности Коши $\overline{B}_{r_i}(x)$ компактных шаров. По утверждению 3.11 из предыдущей лекции такой предел компактен.

Шаг 4. Воспользовавшись компактностью $\overline{B}_{\rho(x)}(x)$, мы докажем, что шар $\overline{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ компактен для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Таким образом мы придем к противоречию.

Рассмотрим ограничение функции ρ на $\overline{B}_{\rho(x)}(x)$. Поскольку ρ непрерывна и положительна, а шар $\overline{B}_{\rho(x)}(x)$ компактен, имеем

$$\rho|_{\overline{B}_{\rho(x)}(x)} \geqslant 2\varepsilon > 0$$

для какого-то положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Поэтому каждый замкнутый 2ε-шар с центром в $z \in \overline{B}_{\rho(x)}(x)$ компактен.

Пусть V — конечная ε-сеть в $\overline{B}_{\rho(x)}(x)$. Тогда $\overline{B}_{\rho(x)}(x) \subset V(\varepsilon)$, а

$$\overline{B}_{\rho(x)}(x)(\varepsilon) \subset V(\varepsilon)(\varepsilon) = V(2\varepsilon).$$

Мы получили, что шар $\overline{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ лежит в объединении замкнутых 2ε-шаров с центрами в точках из V. Эти шары компактны, а поскольку конечное объединение компактов компактно (докажите это), $\overline{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ является замкнутым подмножеством компакта. Значит, $\rho(x)$ не является супремумом всех ρ, для которых $\overline{B}_{\rho}(x)$ компактно: мы пришли к противоречию. Теорема 4.4 доказана. $\square$

4.3. Геодезические в метрическом пространстве

Определение 4.5. Пусть M — метрическое пространство с внутренней метрикой. Непрерывное отображение $\gamma\colon [0, \alpha] \to M$ называется *кратчайшей*, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Любой отрезок кратчайшей — снова кратчайшая. Действительно, если $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ можно соединить путем γ', более коротким, чем γ, тогда $\gamma(0)$, $\gamma(\alpha)$ можно соединить путем, идущим от 0 до t_1 по γ, от t_1 до t_2 по γ' и от t_2 до α по γ; этот путь будет, очевидно, короче исходного.

Напомним, что гомеоморфизмом метрических пространств называется непрерывная биекция, обратное отображение к которой тоже непрерывно.

Если $\varphi\colon [0, \alpha] \to [0, \alpha]$ — гомеоморфизм, а γ — путь из x в y, то композиция $\varphi \circ \gamma$ — тоже путь из x в y. В такой ситуации $\varphi \circ \gamma$ называется *репараметризацией* пути γ. Легко видеть, что длина пути не меняется при его репараметризации (докажите). Поэтому репараметризация кратчайшей — снова кратчайшая.

Пути, полученные один из другого посредством репараметризации, называются *эквивалентными с точностью до репараметризации*, а выбор пути в классе эквивалентности — *параметризацией*.

Определение 4.6. Пусть $\gamma\colon [0,\alpha]\to M$ — кратчайшая, соединяющая x и y, причем $d(\gamma(x),\gamma(y))=|x-y|$ для любых x,y. Такая кратчайшая называется *кратчайшей геодезической*, а соответствующая параметризация — *геодезической параметризацией*. Очевидно, кратчайшая геодезическая задает изометрическое вложение $[0,\alpha]\to M$.

Утверждение 4.7. *Пусть $\gamma\colon [0,\alpha]\to M$ — кратчайшая, соединяющая x и y, причем $d(x,y)=\alpha$. Тогда у γ существует геодезическая параметризация.*

Доказательство. Утверждение 4.7 легко увидеть из простых физических соображений. Представьте себе велосипедиста, который едет по дороге с переменной скоростью. Пусть $\gamma(t)$ — координата велосипедиста. Возьмем вместо t расстояние, которое велосипедист уже проехал; полученная траектория (зависящая уже не от времени, а от параметра «расстояние от начала») и является кратчайшей геодезической.

Для доказательства утверждения 4.7 нам понадобится несколько предварительных замечаний.

Лемма 4.8. *Пусть $\varphi: M\to N$ — непрерывное отображение. Тогда образ компактного подмножества $Z\subset M$ — компакт.*

Доказательство. Возьмем покрытие $\varphi(Z)$ открытыми подмножествами; его прообраз дает открытое покрытие Z, из которого можно выбрать конечное подпокрытие в силу компактности. □

Если M компактно, то любая непрерывная биекция из M в N является гомеоморфизмом. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что образ открытого множества является открытым; в силу биективности это эквивалентно тому, что образ замкнутого множества замкнут. Но образ компакта при непрерывном отображении всегда компактен, значит, образ любого замкнутого подмножества замкнут.

Вернемся к доказательству утверждения 4.7. Рассмотрим отображение $\varphi\colon [0,\alpha]\to[0,\alpha]$, $\varphi(t)=d(x,\gamma(t))$. Это отображение непрерывно, потому что функция $d_x(y)=d(x,y)$ непрерывна (она липшицева; проверьте это). Поскольку каждый отрезок кратчайшей — кратчайшая, оно биективно: действительно, $d(x,\gamma(t))$ равно длине пути $\gamma|_{[0,t]}$, а значит, эта функция монотонно возрастает. Непрерывное биективное отображение из компакта в компакт — гомеоморфизм, как мы только что доказали. Поэтому $\gamma'=\varphi^{-1}\circ\gamma$ является репараметризацией пути γ. Для $t\in[0,\alpha]$ имеем

$$d(x,\gamma(\varphi^{-1}(t)))=\varphi(\varphi^{-1}(t))=t,$$

а значит, γ' — геодезическая.

Теоремой Хопфа—Ринова называется утверждение о компактности ограниченного замкнутого подмножества в локально компактном пространстве с внутренней метрикой (теорема 4.4). Также теоремой Хопфа—Ринова называется утверждение о наличии геодезических в полном локально компактном пространстве с внутренней метрикой. □

Теорема 4.9 (теорема Хопфа—Ринова, часть 2)**.** *Пусть M — локально компактное полное метрическое пространство с условием Хопфа—Ринова, а $x_0, x_1\in M$ — произвольные точки, для которых $d(x_0,x_1)=\alpha$. Тогда существует кратчайшая геодезическая $\gamma\colon[0,\alpha]\to M$, соединяющая x_0 и x_1. В частности, M является пространством с внутренней метрикой.*

Доказательство. По условию Хопфа—Ринова $d(x_0,\overline{B}_{\alpha/2}(x_1))=\alpha/2$. Функция $d_{x_0}(y):=d(x_o,y)$ непрерывна, а шар $\overline{B}_{\alpha/2}(x_1)$ компактен по уже доказанной теореме Хопфа—Ринова (теорема 4.4). Поэтому в $\overline{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{1/2}$, для которой $d(x_0,x_{1/2})=d(x_{1/2},x_1)=\alpha/2$. Аналогичное рассуждение, примененное к паре $x_0, x_{1/2}$, доказывает, что найдется такая точка $x_{1/4}$, что $d(x_0,x_{1/4})=d(x_{1/4},x_{1/2})=\alpha/4$. Повторяя это до бесконечности, мы получим для каждого рационального числа[1] $\lambda=n/2^k$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, точку $x_\lambda\in M$, причем $d(x_\lambda,x_{\lambda'})=|\lambda-\lambda'|\alpha$. Это задает изометрическое отображение из множества чисел вида $\lambda\alpha$ (λ двоично-рациональное) на отрезке $[0,\alpha]$ в M. Поскольку M полно, можно продолжить это отображение до отображения пополнений. Получим изометрическое отображение из отрезка $[0,\alpha]$ в M. Это и есть кратчайшая геодезическая. Мы доказали теорему 4.9. □

4.4. История, терминология, литература

Пространства с внутренней метрикой возникли в работах Хайнца Хопфа в 1930-е годы. Хопф изучал топологию римановых многообразий и обнаружил, что многие локальные результаты, получен-

1 Такие рациональные числа называются *двоично-рациональными*.

ные из анализа (существование геодезических, локальная компактность и так далее), верны глобально и позволяют получить много информации о топологии многообразия.

Хайнц Хопф (Heinz Hopf, 1894—1971)

Многообразие есть топологическое пространство, локально (в окрестности каждой точки) гомеоморфное $\mathbb{R}^n$. Такие гомеоморфизмы называются *картами*, а совокупность всех карт — *атласом* на многообразии. С каждым атласом связаны отображения перехода от одной карты к многообразию и к другой карте; всё это отображения из открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ в открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Если они все гладкие (бесконечно дифференцируемые), многообразие называется *гладким*. Гладкое многообразие называется *римановым*, если в каждом «касательном пространстве» задана метрика (положительно определенное скалярное произведение). Интегрируя эту метрику по гладкому пути, можно получить функционал длины гладкого пути; расстояние между точками x, y риманова многообразия определяется как инфимум длины по всем гладким путям из x в y. Эта метрика по построению внутренняя, а $\mathbb{R}^n$, очевидно, локально компактно. Таким образом, доказанные выше теоремы можно применить к римановым многообразиям.

В последние 20-30 лет основные результаты в топологии (доказательство гипотезы Пуанкаре, инварианты Дональдсона и Зайберга—Уиттена) происходят из римановой геометрии, т. е. геометрии римановых многообразий.

Хопф и его ученик Вилли Ринов (Willi Rinow, 1907—1979) получили теорему Хопфа—Ринова в 1931 г. для римановых многообразий. Ее обобщение для локально компактных метрических пространств принадлежит Штефану Кон-Фоссену (Stephan Cohn-Vossen, 1902—1936).

По римановой геометрии есть огромное количество литературы, по большей части совершенно нечитабельной. Лично мне были полезны книжка Милнора «Теория Морса» и «Эйнштейновы многообразия» Артура Бессе. Геометрия пространств с внутренней метрикой восходит по большей части к М. Громову и к математикам школы А. Д. Александрова (Ю. Бураго, Г. Перельман, Д. Бураго, С. Иванов).

Вот небольшой список литературы, которая может оказаться полезной.

- Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.
- Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М.: Наука, 1990.
- Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. — Ижевск: ИКИ, 2004.
- Громов М. Гиперболические группы. — Ижевск: ИКИ, 2002.
- Громов М. Знак и геометрический смысл кривизны. — Ижевск: НИЦ РХД 2000.
- Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. — Birkhäuser, 1999. (Progress in Math., 152).
- Труды Г. Перельмана, А. Петрунина и других авторов на странице А. Петрунина `http://www.math.psu.edu/petrunin/papers/papers.html`.

Лекция 5

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

5.1. Топологическое пространство

Напомним, что в лекции 3 и ранее в листке 3 мы дали определение топологического пространства; это определение принадлежит Хаусдорфу). В этой лекции мы займемся изучением топологических пространств.

Определение 5.1. *Замкнутым множеством* называется множество, дополнение которого открыто.

Заметим, что вместо аксиом, использующих открытые множества, можно было бы выбрать аксиомы, основанные на замкнутости. Получается весьма похожая система аксиом:

1) пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто,

2) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто,

3) M и пустое множество $\varnothing$ замкнуты.

Определение 5.2. *Окрестностью* подмножества $Z \subset M$ называется любое открытое множество, содержащее Z. *Замыканием* подмножества $Z \subset M$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих Z.

Задача 5.1. Докажите, что замыкание любого множества замкнуто. Найдите замыкание $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

Определение 5.3. Подмножество множества M называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает с M. Оно называется *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит непустых открытых подмножеств M.

Задача 5.2. Приведите пример нигде не плотного континуального подмножества отрезка (в обычной топологии).

Определение 5.4. Пусть M, N — топологические пространства. Отображение $\varphi\colon M \to N$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт.

Определение 5.5. *Пределом* последовательности $\{x_i\}$ в M называется такая точка $x \in M$, что в любой ее окрестности содержатся почти все элементы $\{x_i\}$.

Задача 5.3. Придумайте пример пространства, в котором предел не единственный. Докажите, что образ предела при непрерывном отображении — всегда предел.

Определение 5.6. Пусть M — топологическое пространство. *Базой топологии* (base of topology) на M называется набор $\mathcal{U} \subset 2^M$ подмножеств M, состоящий из открытых множеств и такой, что любое открытое подмножество пространства M является объединением набора элементов из $\mathcal{U}$.

Определение 5.7. Пусть $Z \subset M$ — подмножество топологического пространства M. Подмножества вида $U \cap Z$, где U открыто в M, задают топологию на Z (докажите). Эта топология называется *индуцированной с M*.

5.2. Аксиомы Хаусдорфа

В определении топологического пространства, данном Хаусдорфом, требовалось еще одно условие: условие *отделимости*. Впоследствии оказалось, что неотделимые топологические пространства встречаются весьма часто, и это условие стали рассматривать как дополнительную аксиому.

Определение 5.8. Топологическое пространство M называется *отделимым*, или *хаусдорфовым* (separated, Hausdorff), если любые две точки $x \neq y \in M$ имеют непересекающиеся окрестности $U \ni x, V \ni y$.

Задача 5.4. Докажите, что в хаусдорфовом топологическом пространстве предел последовательности единствен.

В алгебраической геометрии важную роль играет топология Зарисского. Пусть R — кольцо, $\operatorname{Spec}(R)$ — множество его простых идеалов, а $f \in R$ — любой элемент. Обозначим через A_f подмножество в $\operatorname{Spec}(R)$, состоящее из всех идеалов, не содержащих f. Рассмотрим на $\operatorname{Spec}(R)$ топологию, где база открытых множеств состоит из A_f для всех $f \in R$. Эта топология называется *топологией Зарисского*, а $\operatorname{Spec}(R)$ — *спектром* кольца.

Задача 5.5. Рассмотрим пространство $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ с топологией Зарисского. Докажите, что оно нехаусдорфово.

В 1920-е годы математики придумали целую линейку аксиом, T_0—T_6, которые называются *аксиомами отделимости* (separation axioms). Каждая из них влечет все предыдущие (докажите это).

Оскар Зарисский (Oscar Zariski, 1899—1986)

Довольно часто аксиомы T_0—T_6 также называют «аксиомами Хаусдорфа».

T_0 (Аксиома Колмогорова) Для любых двух точек $x \neq y \in M$ у одной из них есть окрестность, не содержащая другую точку.

T_1 (Аксиома Фреше) Для любых двух точек $x \neq y \in M$ у точки x есть окрестность, не содержащая y. Равносильная формулировка: все точки пространства M являются замкнутыми множествами (докажите равносильность).

T_2 (Аксиома Хаусдорфа) У любых двух точек $x \neq y \in M$ есть непересекающиеся окрестности.

$T_{2\frac{1}{2}}$ (Аксиома Урысона) У любых двух точек $x \neq y \in M$ есть окрестности, замыкания которых не пересекаются.

T_3 В M выполняется аксиома T_1. К тому же для любого замкнутого множества $Z \subset M$ и любой точки $x \notin Z$ у множества Z и точки x есть непересекающиеся окрестности.

T_4 В M выполняется аксиома T_1. К тому же любые два непересекающихся замкнутых подмножества пространства M имеют непересекающиеся окрестности.

T_5 В любом подмножестве пространства M, взятом с индуцированной топологией, выполняется аксиома T_4.

T_6 В M выполняется аксиома T_4. К тому же каждое замкнутое множество можно получить как счетное пересечение открытых.

Отметим, что в листочках аксиом отделимости меньше. Терминология, которая использовалась в листочках, принята в отечественной литературе, а более пространная версия из лекций — в западной литературе и в англоязычной Википедии.

В любом метрическом пространстве M выполняется аксиома T_6 (а значит, и все остальные аксиомы из списка). Действительно, ε-окрестность любого множества открыта (докажите), и каждое замкнутое подмножество метрического пространства получается как пересечение своих ε-окрестностей. Чтобы убедиться, что в M выполняется аксиома T_4, возьмем замкнутые непересекающиеся множества Z_1, Z_2 в M и для каждой точки $x \in Z_1$ возьмем шар $B_{r/3}(x)$, где $r = d(x, Z_2)$. Объединение всех таких шаров открыто и не пересекается с окрестностью Z_2, полученной таким же образом.

Задача 5.6. Пусть Z_1, Z_2 — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства, где выполняется аксиома T_4. Докажите, что у Z_1, Z_2 есть окрестности, замыкания которых не пересекаются.

Докажем импликацию $T_6 \Rightarrow T_5$. Пусть $Z \subset M$ — любое подмножество, а $K, K' \subset Z$ — непересекающиеся подмножества, которые замкнуты в Z. Обозначим их замыкания в M через $\overline{K}$ и $\overline{K}'$. Легко видеть, что K не пересекается с $\overline{K}'$, а K' не пересекается с $\overline{K}$. Пусть $K'' = \overline{K} \cap \overline{K}'$. Тогда K'' получается как пересечение счетного семейства открытых множеств U_i. Возьмем у $K \setminus U_0$ и $K' \setminus U_0$ непересекающиеся окрестности V_0 и V_0'. Воспользовавшись предыдущей задачей, можно предположить, что замыкания $\overline{V}_0$ и $\overline{V}_0'$ не пересекаются. Применив аксиому T_4 к $\overline{V}_0 \cup K \setminus U_1$, $\overline{V}_0' \cup K' \setminus U_1$, получим окрестности V_1, V_1' замкнутых подмножеств $K \setminus U_1$, $K' \setminus U_1$, замыкания которых не пересекаются. Применив индукцию, получим систему открытых множеств $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, $V_0' \subset V_1' \subset V_2' \subset \ldots$, которые не пересекаются, причем $V_i \supset K \setminus U_i$ и $V_i' \supset K' \setminus U_i$. Объединение всех V_i содержит K, открыто и не пересекается с объединением всех V_i', которое содержит K'.

Если пропустить предыдущий абзац, никакой беды не будет, в дальнейшем он не используется.

Задача 5.7*. Для каждой из аксиом T_i придумайте примеры пространств, в которых она выполнена, а предыдущая не выполнена.

Задача 5.8. Докажите, что во всяком пространстве $\operatorname{Spec}(R)$ с топологией Зарисского выполнена аксиома T_0, а T_1 не выполнена для $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

5.3. Аксиомы счетности

Определение 5.9. Пусть M — топологическое пространство, а $x \in M$ — точка. Набор окрестностей $\{U_\alpha \ni x\}$ называется *базой окрестностей в точке* (local base), если каждая окрестность точки x содержит какую-то из окрестностей U_α.

Определение 5.10. Топологическое пространство *обладает счетной базой в точке,* если у каждой точки есть счетная база окрестностей. Это условие также называется *первой аксиомой счетности* (first axiom of countability).

Всякое метрическое пространство удовлетворяет этому условию (докажите).

Для пространства M с первой аксиомой счетности подмножество $Z \subset M$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит предельные точки всех последовательностей. Доказательство вполне аналогично доказательству этого факта для метрических пространств (докажите). Поэтому для пространств со счетной базой окрестностей в каждой точке непрерывность можно определять через пределы последовательностей, как это делается для метрических пространств.

Определение 5.11. Топологическое пространство *обладает счетной базой*, если у него есть счетная база открытых множеств. Это условие также называется *второй аксиомой счетности* (second axiom of countability).

По-английски пространства, удовлетворяющие первой и второй аксиомам счетности, часто называют first-countable, second-countable.

Задача 5.9. Докажите, что пространство со счетной базой в точке содержит плотное счетное подмножество тогда и только тогда, когда у него есть счетная база.

Лекция 6

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ

6.1. Свойства произведения

Определение 6.1. Пусть M — топологическое пространство. Напомним, что *базой топологии* на M называется такой набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, что любое открытое множество получается как объединение элементов этого набора. *Предбазой топологии* на M называется такой набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, что всевозможные их конечные пересечения образуют базу топологии.

Замечание 6.2. Любой набор множеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, для которого

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M,$$

является предбазой некоторой топологии на M. Определим топологию на M таким образом, что открытые множества получаются объединениями и конечными пересечениями из элементов набора $\{U_\alpha\}$. Проверьте, что это топология.

Замечание 6.3. По той же самой причине базой некоторой топологии на M является любой набор множеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, который замкнут относительно конечных пересечений[1] и удовлетворяет условию $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ (проверьте).

Пусть M, M' — топологические пространства. Пусть $\mathscr{U} \subset 2^{M \times M'}$ — набор подмножеств пространства $M \times M'$, состоящий из всех подмножеств вида $U \times U'$, где $U \subset M$, $U' \subset M'$ открыты. Очевидно, $\mathscr{U}$ замкнуто относительно конечных пересечений (проверьте это). В силу вышеизложенного оно является базой топологии на $M \times M'$.

Определение 6.4. Рассмотрим $M \times M'$ с топологией, заданной базой открытых множеств вида $U \times U'$, где $U \subset M$, $U' \subset M'$ открыты. Это топологическое пространство называется *произведением M_1 и M_2*.

Задача 6.1. Докажите, что произведение двух пространств, удовлетворяющих первой (второй) аксиоме счетности, снова удовлетворяет первой (второй) аксиоме счетности.

---

1 *Замкнутость $\{U_\alpha\}$ относительно конечных пересечений* означает, что для любого конечного набора $U_1, \ldots, U_k \in \{U_\alpha\}$ пересечение $\bigcap_i U_i$ лежит в $\{U_\alpha\}$.

Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство — такое пространство, что любые две его точки имеют непересекающиеся окрестности. Произведение хаусдорфовых топологических пространств снова хаусдорфово. Действительно, пусть (x, x') и (y, y') — две разные точки в $M \times M'$. Тогда либо $x \neq y$, либо $x' \neq y'$. Предположим, что верно первое. Возьмем непересекающиеся окрестности U, V точек x, y, тогда открытые множества $U \times M'$, $V \times M'$ содержат (x, x') и (y, y') и не пересекаются.

Определение 6.5. Отображение $\Delta\colon M \to M \times M$, $x \to (x, x)$, называется *диагональным вложением*, а его образ — *диагональю*. Докажите, что Δ непрерывно.

Задача 6.2. Докажите, что пространство M является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда диагональ — замкнутое подмножество в $M \times M$.

Произведение нескольких топологических пространств определяется индуктивно: $(M_1 \times M_2) \times M_3 \times \ldots$ Докажите, что результат не зависит от порядка расстановки скобок.

6.2. Отображения в $M \times M'$

Определение 6.6. Пусть на множестве M заданы две топологии: $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$. Говорится, что $\mathscr{U}_1$ *слабее* $\mathscr{U}_2$, а $\mathscr{U}_2$ *сильнее* $\mathscr{U}_1$, если тождественное отображение $(M, \mathscr{U}_2) \to (M, \mathscr{U}_1)$ непрерывно.[1]

Чем *слабее* топология, тем *больше* сходящихся последовательностей, *меньше* непрерывных функций и *меньше* открытых множеств; на каждом множестве кодискретная топология — самая слабая, а дискретная — самая сильная.

Очевидно, топология произведения — слабейшая топология на $M \times M'$, для которой проекции $\pi\colon M \times M' \to M$, $\pi'\colon M \times M' \to M'$ непрерывны. Действительно, предбаза топологии на $M \times M'$ порождена прообразами открытых множеств при этих проекциях.

Топологию произведения можно охарактеризовать следующим образом.

Утверждение 6.7. *Если M, M', X — топологические пространства, а $\pi\colon M \times M' \to M$, $\pi'\colon M \times M' \to M'$ — отображения проекции, то отображение $\varphi\colon X \to M \times M'$ непрерывно тогда и только тогда,*

1 Во многих текстах более слабой называется та топология, которую мы называем более сильной. Будьте внимательны!

когда непрерывны композиции $\varphi \circ \pi$, $\varphi \circ \pi'$. Это задает биекцию между множествами

$$\left\{\begin{matrix} \text{пары непрерывных} \\ \text{отображений} \\ \varphi\colon X \to M,\ \varphi'\colon X \to M' \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{непрерывные} \\ \text{отображения} \\ X \to M \times M' \end{matrix}\right\}. \qquad (6.2.1)$$

Доказательство. Биекция (6.2.1) строится так: паре (φ, φ') ставится в соответствие отображение $\Phi\colon x \to (\varphi(x), \varphi'(x))$. Если Φ непрерывно, то φ, φ' тоже непрерывны, потому что они получены композицией Φ с проекцией. С другой стороны,

$$\Phi^{-1}(U \times U') = \varphi^{-1}(U) \cap \varphi'^{-1}(U')$$

(проверьте это). Следовательно, $\Phi^{-1}(V)$ открыто для любого открытого множества $V \subset M \times M'$, если φ, φ' непрерывны. □

Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение. *График отображения* f — это множество всех пар вида $(x, f(x)) \in X \times Y$. Диагональ является графиком тождественного отображения.

6.3. Произведение метрических пространств

Обозначим, как и раньше, через $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ множество всех неотрицательных чисел.

Утверждение 6.8. *Пусть (M, d) и (M', d') — метрические пространства, а $\rho\colon (\mathbb{R}^{\geqslant 0})^2 \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:*

невырожденность: $\rho(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$;
субаддитивность: $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$;
монотонность: $\rho(a, b) \geqslant \rho(a_1, b_1)$, *если* $a \geqslant a_1$, $b \geqslant b_1$.

Тогда функция

$$d_\rho((x, x'), (y, y')) := \rho(d(x, y), d'(x', y'))$$

задает метрику на $M \times M'$.

Доказательство. Симметричность d_ρ следует прямо из определения, а невырожденность — из невырожденности ρ. Неравенство треугольника выводится так:

$$\begin{aligned} d_\rho((x,x'),(z,z')) &= \rho(d(x,z),d'(x',z')) \leqslant \\ &\leqslant \rho(d(x,y)+d(y,z),d'(x',y')+d'(y',z')) \leqslant \\ &\leqslant \rho(d(x,y),d'(x',y'))+\rho(d(y,z),d'(y',z')) = \\ &= d_\rho((x,x'),(y,y'))+d_\rho((y,y'),(z,z')) \end{aligned}$$

(первое неравенство следует из монотонности, второе из субаддитивности). □

Рассмотрим функцию $\rho_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Эта функция монотонна, субаддитивна и невырожденна (проверьте), а поэтому задает метрику d_{ρ_2} на произведении метрических пространств. Такая метрика называется *метрикой произведения*. Легко видеть, что $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$ изометрично $\mathbb{R}^n$.

Вместо $\sqrt{x^2+y^2}$ можно рассматривать другие функции, например $\rho_\infty(x,y):=\max(x,y)$ и $\rho_1(x,y):=x+y$. Проверьте, что эти функции тоже задают метрику на $M\times M'$.

Задача 6.3. Пусть $a,b\in\mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Докажите следующие неравенства:

$$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a+b\leqslant 2\sqrt{a^2+b^2};$$
$$\max(a,b)\leqslant a+b\leqslant 2\max(a,b).$$

Из первого неравенства следует, что тождественное отображение

$$(M\times M',d_{\rho_2})\to(M\times M',d_{\rho_1}) \tag{6.3.1}$$

липшицево и обратное ему тоже липшицево. Значит, отображение (6.3.1) является гомеоморфизмом. Из второго неравенства следует, что тождественное отображение $(M\times M',d_{\rho_\infty})\to(M\times M',d_{\rho_1})$ тоже является гомеоморфизмом.

Задача 6.4*. Будет ли тождественное отображение

$$(M\times M',d_{\rho_2})\to(M\times M',d_\rho)$$

липшицевым для любой функции $\rho\colon(\mathbb{R}^{\geqslant 0})^2\to\mathbb{R}^{\geqslant 0}$, которая монотонна, субаддитивна, невырожденна и переводит $(0,0)$ в 0? Будет ли оно всегда гомеоморфизмом?

Из определения ясно, что открытые шары в $(M\times M',d_{\rho_\infty})$ имеют вид $B_r(x)\times B_r(x')$. Такие шары, очевидно, открыты в топологии произведения, и поэтому тождественное отображение

$$M \times M' \to (M \times M', d_{\rho_\infty})$$

является непрерывным. Обратное отображение непрерывно в силу утверждения 6.7, поскольку непрерывны проекции $(M \times M', d_{\rho_\infty}) \to \to M$ и $(M \times M', d_{\rho_\infty}) \to M'$ (обе эти проекции липшицевы).

6.4. Полуметрики и полунормы

Определение 6.9. Пусть $d\colon M \times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

рефлексивность: $d(x, x) = 0$;
симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$;
неравенство треугольника: $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

для любых точек $x, y, z \in M$. Тогда d называется *полуметрикой* (semimetric).

От определения метрики это отличается только отсутствием условия невырожденности: $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Отметим, что условие $d(x, y) = 0$ задает на M отношение эквивалентности, что следует из неравенства треугольника (проверьте). Более того, если $d(x, y) = 0$, то

$$d(z, x) + d(x, y) \geqslant d(y, z), \quad d(z, y) + d(y, x) \geqslant d(z, x)$$

в силу неравенства треугольника. Из первого неравенства следует, что $d(z, x) \geqslant d(y, z)$, и второго — что $d(z, x) \leqslant d(y, z)$, поскольку $d(x, y) = 0$. Получаем, что функция d корректно определена на множестве $\underline{M}$ классов эквивалентности по отношению $d(x, y) = 0$. Эта функция является метрикой (проверьте). Мы получили следующее утверждение.

Утверждение 6.10. *Каждое пространство (M, d) с полуметрикой наделено сюръективным отображением $\pi\colon M \to \underline{M}$ в метрическое пространство $(\underline{M}, \underline{d})$, и при этом*

$$d(x, y) = \underline{d}(\pi(x), \pi(y)). \tag{6.4.1}$$

□

Начав с произвольного отображения $\pi\colon M \to \underline{M}$ из множества M в метрическое пространство $(\underline{M}, \underline{d})$, определим на M функцию d по формуле (6.4.1). Это будет полуметрика (проверьте). Из утверждения 6.10 следует, что любая полуметрика получается таким образом.

В геометрии линейных пространств похожим образом определяются полунормы.

Определение 6.11. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\nu\colon V \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ — функция со значениями в множестве неотрицательных чисел. Функция ν называется *полунормой* на V, если выполняются следующие условия:

неравенство треугольника: $\nu(v+v') \leqslant \nu(v) + \nu(v')$;
инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda v) = |\lambda|\,\nu(v)$

для любых $v,\ v' \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Векторное пространство с полунормой наделено полуметрикой, определяемой по формуле $d(x, y) = \nu(x-y)$. Множество векторов, удовлетворяющих условию $\nu(x) = 0$, называется *нуль-пространством* полунормы (nullspace). Применив конструкцию, описанную в утверждении 6.10, мы получим, что отображение $V \to \underline{V}$ — это отображение V в его факторпространство по нуль-пространству, а $\underline{V}$ — нормированное векторное пространство.

Определение 6.12. Пусть M — множество, наделенное семейством полуметрик $\{d_\alpha\}$. *Открытым шаром в полуметрике* d_α называется множество

$$B_{r,d_\alpha}(x) = \{y \in M\colon\ d(x, y) < r\}.$$

Топология, заданная семейством полуметрик, — это топология, построенная по предбазе $B_{r,d_\alpha}(x)$ для всех $x \in M$, всех d_α и всех $r \in \mathbb{R}^{>0}$.

6.5. Тихоновская топология

Обозначим через $\operatorname{Map}(A, B)$ множество всех отображений из множества A в B.

Пусть M — некоторое множество, $\mathfrak{I}$ — набор индексов (не обязательно конечный или счетный), а $M^{\mathfrak{I}}$ — произведение M на себя $\mathfrak{I}$ раз. Можно думать про $M^{\mathfrak{I}}$ как про множество последовательностей, индексированных элементами из $\mathfrak{I}$, или как про множество отображений $\operatorname{Map}(\mathfrak{I}, M)$.

Пусть $\pi_\alpha\colon M^{\mathfrak{I}} \to M$ — проекция из $M^{\mathfrak{I}}$ на компоненту с индексом α. Если мы отождествим $M^{\mathfrak{I}}$ с $\operatorname{Map}(\mathfrak{I}, M)$, то π_α переводит отображение $f\colon \mathfrak{I} \to M$ в $f(\alpha)$.

Для какого-то набора индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{I}$ обозначим через

$$\pi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\colon M^{\mathfrak{I}} \to M^n$$

проекцию $M^{\mathfrak{I}}$ на произведение компонент с индексами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Утверждение 6.13. *В этих условиях пусть $\mathscr{U}$ — слабейшая топология на $M^{\mathfrak{I}}$, в которой непрерывны все отображения π_α. Тогда $\mathscr{U}$ задается предбазой вида*

$$\{\pi_\alpha^{-1}(U)\colon\ \alpha \in \mathfrak{I},\ U \subset M,\ U \textit{ открыто}\}.$$

Кроме того, $\mathscr{U}$ задается базой вида

$$\{\pi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{-1}(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n)\colon\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{I},\ U_i \subset M,\ U_i \textit{ открыты}\}.$$

Доказательство. Множества $\pi_\alpha^{-1}(U)$ открыты в силу непрерывности π_α и порождают слабейшую топологию, в которой все π_α непрерывны. Пересечение таких множеств имеет вид

$$\bigcap_i \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i) = \pi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{-1}(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n),$$

а конечные пересечения множеств из предбазы образуют базу. □

Определение 6.14. Построенная выше топология на $M^{\mathfrak{I}}$ называется *тихоновской топологией*, или *топологией произведения*.

Задача 6.5. Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что $M^{\mathfrak{I}}$ хаусдорфово.

Утверждение 6.15. *Пусть (M, d) — метрическое пространство. Для каждого индекса $\alpha \in \mathfrak{I}$ определим полуметрику d_α на $M^{\mathfrak{I}}$ по формуле $d_\alpha(x, y) = d(\pi_\alpha(x), \pi_\alpha(y))$. Рассмотрим топологию $\mathscr{U}_1$, определенную на M системой полунорм d_α. Тогда эта топология совпадает с тихоновской.*

Доказательство. Предбазой для топологии $\mathscr{U}_1$ является множество открытых шаров вида $B_{r,d_\alpha}(x)$. Очевидно,

$$B_{r,d_\alpha}(x) = \pi_\alpha^{-1}(U),$$

где $U = B_r(\pi_\alpha(x))$ — это открытый шар в M (докажите это). Поэтому предбаза для топологии $\mathscr{U}_1$ является предбазой для тихоновской топологии и эти две топологии совпадают. □

Определение 6.16. Пусть $(M,\{d_\alpha\})$ — пространство с семейством полуметрик, а $\{x_i\}$ — последовательность точек в M. Мы говорим, что $\{x_i\}$ — *последовательность Коши относительно этого семейства полуметрик*, если для каждого индекса α и для каждого $\varepsilon>0$ почти все элементы $\{x_i\}$ лежат в некотором ε-шаре $B_{\varepsilon,d_\alpha}(x)$. Мы говорим, что $(M,\{d_\alpha\})$ *полно*, если каждая последовательность Коши имеет предел в топологии, заданной полуметриками.

Теорема 6.17. *Пусть M — полное метрическое пространство, а $\mathfrak{I}$ — некоторый набор индексов. Рассмотрим $M^{\mathfrak{I}}$ с тихоновской топологией и полуметриками, заданными выше. Тогда $M^{\mathfrak{I}}$ полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}\in M^{\mathfrak{I}}$ — последовательность Коши. Отождествляя $M^{\mathfrak{I}}$ с $\operatorname{Map}(\mathfrak{I},M)$, как выше, мы можем рассматривать x_i как отображения $x_i\colon \mathfrak{I}\to M$. По определению $\{x_i\}$ является последовательностью Коши тогда и только тогда, когда для каждого индекса $\alpha\in\mathfrak{I}$ образы $\{x_i(\alpha)\}$ задают последовательность Коши в M. Поскольку M полно, последовательность Коши $\{x_i(\alpha)\}$ сходится к элементу $x(\alpha)\in M$. Это задает отображение $x\colon\mathfrak{I}\to M$, которое и будет пределом последовательности $\{x_i\}$. $\square$

Из этого доказательства ясно, что последовательность

$$\{x_i\}\in\operatorname{Map}(\mathfrak{I},M)$$

сходится к $x\colon\mathfrak{I}\to M$ в тихоновской топологии тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_i(\alpha)\}$ сходится для любого индекса α. Поэтому тихоновскую топологию называют еще *топологией поточечной сходимости* или *топологией почленной сходимости*.

Когда $M=\mathbb{R}$, а $\mathfrak{I}=\mathbb{N}$ (множество натуральных чисел), $M^{\mathfrak{I}}$ — это множество последовательностей вещественных чисел с топологией почленной сходимости. Эту топологию часто называют *слабой топологией*.

Слабую топологию открыл венгерский математик Фридьеш Рисс.

Довольно рано стало ясно, что ее невозможно задать никакой нормой. Обнаружив это, Рисс придумал в 1909 г. определение топологического пространства (независимое от нормы и метрики), основанное на понятии замыкания. Таким образом появилось первое определение топологического пространства. Впоследствии идеи Рисса развил Хаусдорф, получив современное определение топологического пространства.

6.6. Пространства Фреше

Определение 6.18. Пусть V — векторное пространство, на котором задана топология $\mathcal{U}$. Пространство $(V, \mathcal{U})$ называется *топологическим векторным пространством,* если отображение $x, y \to x + y$ непрерывно как отображение $V \times V \to V$ и для любого ненулевого $\lambda \in \mathbb{R}$ отображение $x \to \lambda x$ задает гомеоморфизм из V в V.

Топология на топологическом векторном пространстве не обязательно задается нормой (даже если у пространства есть счетная база). Во многих случаях топология задается не нормой, а системой полунорм. Есть и более экзотические способы задания топологии.

Определение 6.19. Пространство V с системой полунорм $\{d_\alpha\}$ называется *пространством Фреше* (Fréchet space), если эта система задает на V хаусдорфову топологию и V полно как пространство с семейством полунорм.

Напомним, что векторное пространство с нормой называется *банаховым,* если оно полно как метрическое пространство. Банахово пространство является (дурацким) примером пространства Фреше. Другим примером пространства Фреше является пространство

Фридьеш Рисс (Frigyes Riesz, 1880—1956)

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ последовательностей вещественных чисел с топологией почленной сходимости (оно полно, как следует из теоремы 6.17). Можно доказать, что эта топология на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не может быть задана никакой нормой.

6.7. Тихоновский куб и гильбертов куб

Рассмотрим отрезок $[0,1]$, и пусть $[0,1]^{\mathbb{N}}$ — множество последовательностей точек из $[0,1]$. Для $\{x_i\}, \{y_i\} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ определим

$$d_h(\{x_i\}, \{y_i\}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|^2}{i^2}}.$$

Легко видеть, что d_h задает метрику на $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (докажите).

Определение 6.20. Построенное таким образом метрическое пространство $([0,1]^{\mathbb{N}}, d_h)$ называется *гильбертовым кубом* (Hilbert cube).

Определение 6.21. Пространство $[0,1]^{\mathbb{N}}$ с топологией произведения называется *тихоновским кубом* (Tychonoff cube).

Теорема 6.22. *Тождественное отображение задает гомеоморфизм между тихоновским кубом и гильбертовым кубом.*

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть I_h — гильбертов куб, I_t — тихоновский куб. Обозначим через $\pi_n\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ проекцию $\{x_i\} \to \to x_n$. Поскольку отображение

$$\pi_n\colon I_h \to [0,1]$$

n^2-липшицево (докажите), проекции π_n непрерывны на I_h.

Шаг 2. Для любого топологического пространства X отображение $\varphi\colon X \to I_t$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $\varphi \circ \pi_i$ непрерывна для всех i (это следует из определения тихоновского куба; см. также доказательство утверждения 6.7).

Поскольку проекции $\pi_n\colon I_h \to [0,1]$ непрерывны (шаг 1), тождественное отображение $I_h \to I_t$ непрерывно.

Шаг 3.

Лемма. *Пусть* $(M, \{d_\alpha\})$ — *пространство с топологией, заданной системой полуметрик* $\{d_\alpha\}$, *а* $d_\alpha(x, \cdot)\colon M \to \mathbb{R}$ — *функция, которая переводит* y *в* $d_\alpha(x, y)$. *Тогда функция* $d_\alpha(x, \cdot)$ *непрерывна.*

Доказательство. Открытый шар $B_{r,d_\alpha}(x)$ открыт по определению. Замкнутый шар

$$\bar{B}_{r,d_\alpha}(x) = \{y \in M\colon d_\alpha(x,y) \leqslant r\}$$

замкнут, поскольку каждая точка y, которая ему не принадлежит, принадлежит открытому шару $B_{\varepsilon,d_\alpha}(x)$ для любого $\varepsilon < d(y,x) - r$. Поэтому прообраз любого открытого интервала $d_\alpha(x,\cdot)^{-1}((\alpha,\beta))$ открыт (это дополнение открытого шара до замкнутого). $\square$

Шаг 4. Пусть $\mathfrak{v} = \{x_i\} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ — любая последовательность. Рассмотрим функцию $\mu_{\mathfrak{v}}: I_t \to \mathbb{R}$,

$$\mu_{\mathfrak{v}}(\{y_i\}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\{x_i\},\{y_i\})}{k^2},$$

где $d_k(\{x_i\},\{y_i\}) = |x_k - y_k|$. Поскольку d_k — это k-я полуметрика, используемая для определения тихоновской топологии, функция

$$\{y_i\} \to d_k(\{x_i\},\{y_i\})$$

непрерывна в силу леммы, доказанной в шаге 3. Поэтому функция $\mu_{\mathfrak{v}}$ тоже непрерывна.

Шаг 5.

Лемма. *Пусть $f: X \to M$ — отображение из топологического пространства в метрическое пространство (M,d). Для любой точки $z \in M$ рассмотрим функцию $d_z: M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, $d_z(x) := d(z,x)$. Тогда функция f непрерывна в том и только том случае, когда композиции $f \circ d_z: M \to \mathbb{R}$ непрерывны для всех z.*

Доказательство. Функции d_z непрерывны, ибо они 1-липшицевы. Поэтому если функция f непрерывна, то композиции $f \circ d_z$ тоже непрерывны. С другой стороны,

$$(f \circ d_z)^{-1}([0,\alpha)) = f^{-1}(B_\alpha(z)),$$

поэтому из непрерывности $f \circ d_z$ следует открытость $f^{-1}(B_\alpha(z))$, а значит, и непрерывность функции f. $\square$

Шаг 6. Рассмотрим тождественное отображение $\iota: I_t \to I_h$. Непрерывность отображения ι^{-1} доказана на шаге 1, поэтому, чтобы убедиться, что ι — гомеоморфизм, достаточно доказать, что это отображение непрерывно. В силу леммы из шага 5 для этого достаточно доказать, что функция $d_h(\mathfrak{v},\cdot): I_t \to \mathbb{R}$ непрерывна для любого $\mathfrak{v} =$

$= \{x_i\} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Эта функция может быть явно записана как

$$\mu_{\mathfrak{v}}(\{y_i\}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\{x_i\}, \{y_i\})}{k^2},$$

и на шаге 4 мы доказали, что она непрерывна. Теорема 6.22 доказана. Тихоновский куб гомеоморфен гильбертову! $\square$

6.8. История, замечания

Я называл «тихоновским кубом» пространство $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ — произведение счетного числа интервалов. Но никто не мешает нам взять в качестве множества индексов любое множество A, например несчетное. Пространство $[0, 1]^A$ с тихоновской топологией тоже называется тихоновским кубом. Оно компактно.

Для $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ этот удивительный факт, который называется теоремой Тихонова, можно вывести из гомеоморфности $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ и гильбертова куба. Но для общего A доказательство компактности $[0, 1]^A$ имеет другую природу и кажется совершенно неправдоподобным.

Андрей Николаевич Тихонов (1906—1993)

А. Н. Тихонов доказал свою теорему в 1924 г. (ему было тогда 18 лет). В том же 1924 г. он доказал теорему о метризации: любое регулярное (т. е. удовлетворяющее аксиоме Хаусдорфа T3) топологическое пространство со счетной базой метризуемо. Этот результат был немедленно (в 1925 г.) опубликован в «Mathematische Annalen», тогда же он вошел в переиздание учебника Хаусдорфа и стал широко известен.

Теорема Тихонова не была опубликована вплоть до 1930 года, а ее полная версия (любое произведение компактов компактно), также известная Тихонову, не была опубликована им никогда: ее доказал независимо от Тихонова чешский математик Эдуард Чех (Eduard Čech) в 1937 г.

Дело в том, что среди старших товарищей Тихонова много лет никто не верил, что подобное утверждение может быть вообще верно. Теорема Тихонова (и его работа 1930 года) — самая цитируемая и знаменитая теорема общей топологии. Но в 1920-х и начале 1930-х гг., когда Тихонов занимался чистой математикой, он был знаменит в основном работами о метризации.

Причина этого, видимо, лежит в парадоксальности самого понятия тихоновской топологии на произведении топологических пространств. Сейчас свежесть и необычность этого определения не ощущается, но в 1924 г. оно было в полной мере революционным.

Лекция 7

ТЕОРЕМА О МЕТРИЗАЦИИ

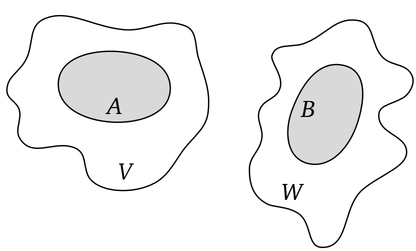
7.1. Нормальные топологические пространства

Определение 7.1. Топологическое пространство M называется *нормальным*, если любые два непересекающихся замкнутых подмножества A и $B \subset M$ имеют непересекающиеся окрестности.

Замечание 7.2. Напомним, что *аксиома Хаусдорфа* утверждает что любые две разные точки топологического пространства имеют непересекающиеся окрестности. Если все точки пространства замкнуты, то из нормальности вытекает хаусдорфовость. Пространство удовлетворяет аксиоме T4, если оно нормально и хаусдорфово.

Обозначение 7.3. Пусть U, V — два подмножества топологического пространства, причем замыкание U лежит в V. Это отношение обозначается так: $U \Subset V$.

Замечание 7.4. Нормальность топологического пространства равносильна такому свойству. Пусть $U \supset A$ — окрестность замкнутого множества A. Тогда найдется такая окрестность $V \supset A$, что $V \Subset U$. В самом деле, возьмем $B := M \setminus U$ и воспользуемся определением нормальности. Мы получим окрестность $V \supset A$, которая не пересекается с некоторой окрестностью $W \supset B$. Дополнение к W замкнуто, содержит V и содержится в U, поэтому замыкание V тоже содержится в U.



Непересекающиеся окрестности замкнутых множеств

Замечание 7.5. Пусть $U_0 \Subset U_1$ — два открытых множества в нормальном топологическом пространстве. Тогда существует открытое множество $U_{1/2}$, для которого $U_0 \Subset U_{1/2} \Subset U_1$. Действительно, возьмем в качестве A замыкание множества U_0 и воспользуемся предыдущим замечанием.

Замечание 7.6. Пусть M — метрическое пространство. Тогда M нормально и хаусдорфово. Действительно, пусть A, B — непересекающиеся замкнутые множества. Возьмем открытые множества

$$V := \bigcup_{z\in A} B_{\frac{1}{2}d(z,B)}(z), \quad W := \bigcup_{z\in B} B_{\frac{1}{2}d(z,A)}(z).$$

Они не пересекаются (проверьте это).

7.2. Функции Урысона

Определение 7.7. Пусть A, B — непересекающиеся замкнутые множества в топологическом пространстве M. Непрерывная функция $\varphi : M \to [0, 1]$ называется *функцией Урысона* (Urysohn function), если $\varphi|_A = 0$, $\varphi|_B = 1$.

Замечание 7.8. В метрическом пространстве функцию Урысона можно построить, воспользовавшись формулой

$$\varphi(x) = \min\left(1, \frac{d(x,A)}{d(x,B)}\right).$$

Теорема 7.9 (лемма Урысона). *Топологическое пространство M нормально тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся замкнутых множеств существует функция Урысона.*

Доказательство леммы Урысона довольно просто. Обозначим через U_1 дополнение к B, и через U_0 обозначим A. Возьмем такое $U_{1/2}$, что $U_0 \Subset U_{1/2} \Subset U_1$, потом возьмем такое $U_{1/4}$, что $U_0 \Subset U_{1/4} \Subset U_{1/2}$, и такое $U_{3/4}$, что $U_{1/2} \Subset U_{3/4} \Subset U_1$. Воспользуемся индукцией. Получим, что для каждого двоично-рационального числа[1] $\lambda \in [0, 1]$ выбрано множество U_λ, открытое при $\lambda > 0$, причем для $\lambda < \mu$ имеем $U_\lambda \Subset U_\mu$.

Рассмотрим функцию $\varphi : U_1 \to [0, 1]$,

$$\varphi(x) := \inf\{\lambda : \ x \in U_\lambda\}.$$

Продолжим эту функцию на M, доопределив ее равенством $\varphi|_B = 1$. Легко видеть, что $\varphi|_A = 0$. Чтобы доказать, что φ — функция

1 Напомним, что двоично-рациональным числом называется рациональное число вида $n/2^m$, где n, m целые.

Урысона, надо убедиться в ее непрерывности. Для этого достаточно проверить, что $\varphi^{-1}([0,\alpha))$ открыто, а $\varphi^{-1}([0,\beta])$ замкнуто, для любых $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Имеем

$$\varphi^{-1}([0,\alpha)) = \bigcup_{\lambda<\alpha} U_\lambda$$

(проверьте это). Это множество, очевидно, открыто. Аналогично

$$\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\alpha>\beta} \varphi^{-1}([0,\alpha)) = \bigcap_{\alpha>\beta}\Bigl(\bigcup_{\lambda<\alpha} U_\lambda\Bigr).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda.$$

Обозначим через $\overline{U}_\lambda$ замыкание множества U_λ. Поскольку

$$U_\lambda \subset \overline{U}_\lambda \subset U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}}$$

для каждого $\lambda>\beta$, имеем

$$\bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda \subset \bigcap_{\lambda>\beta} \overline{U}_\lambda \subset \bigcap_{\lambda>\beta} U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}} = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda.$$

Мы получили, что

$$\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\lambda>\beta} \overline{U}_\lambda,$$

а это множество, очевидно, замкнуто. Мы доказали лемму Урысона. □

Замечание 7.10. Если в пространстве верна лемма Урысона, то оно нормально (докажите).

7.3. «Создатель советской топологии»

Основные результаты общей топологии принадлежат «московской школе топологии» — П. С. Урысону, П. С. Александрову и А. Н. Тихонову, которые провели начало и середину 1920-х гг., решая проблему метризации топологических пространств и изучая компактные пространства.

П. С. Александров был учеником Н. Н. Лузина, специалиста по теории функций действительного переменного. В конце 1910-х гг.

Лузин занимался общими вопросами теории множеств. В 1917 году он предложил Александрову доказать общую форму континуум-гипотезы (о несуществовании множеств мощности, промежуточной между X и 2^X). Сейчас известно, что ни континуум-гипотеза, ни ее отрицание не следуют из аксиом теории множеств. Александров провел немало времени, записывая доказательство этого утверждения, как оказалось — неправильное. После этой катастрофы Александров бросил математику и стал театральным режиссером.

Проведя несколько лет в занятиях театром и литературной деятельностью, Александров вернулся в Москву и поступил в аспирантуру. Там он встретился с П. С. Урысоном, студентом на два года его младше.

После возвращения в Москву Александров продолжил занятия функциями действительного переменного, популярные в Москве. Урысон принадлежал к другому поколению. Начав свое образование как физик, он опубликовал свою первую статью (о рентгеновском свечении) в 1915 г., в 17 лет, но в скором времени заинтересовался математикой. Защитив диссертацию по интегральным уравнениям, Урысон по совету Д. Ф. Егорова занялся топологией и провел 1921 и 1922 годы, разрабатывая теорию размерности для общих метрических пространств.

Урысон пытался объединить абстрактные топологические конструкции Хаусдорфа с геометрическими идеями, почерпнутыми у Пуанкаре, и немало преуспел в этом — сам предмет теоремы о метризации состоит в нахождении геометрической структуры на абстрактном топологическом пространстве.

В 1921—22 годах Урысон читал в Московском университете курс под названием «Топология континуума», на котором приобщал московскую математическую общественность к топологии; П. С. Александров называет Урысона создателем советской топологии. Тогда же Урысон стал на краткое время научным руководителем А. Н. Колмогорова (Колмогорову было 18 лет, но он успел прославиться, найдя контрпример к одной из задач Н. Н. Лузина).

К исследованиям Урысона вскоре присоединился и сам Александров, и в 1923 г. Александров и Урысон написали совместную работу, где дали определение компактного пространства (в терминологии того времени «бикомпактного»; русские специалисты по общей топологии до сих пор иногда используют это слово).

Павел Самуилович Урысон (1898—1924)

1923 и 1924 годы Александров и Урысон провели в поездках за границу. Деньги на эти поездки они зарабатывали, читая в Москве, Воронеже, Смоленске и других городах публичные лекции по теории относительности Эйнштейна. Выгодное соотношение курса червонца к западным валютам привело к тому, что денег от 20 лекций хватало для полугодичной поездки по научным центрам Европы и длительных пешеходных экспедиций.

За остававшиеся ему два года (в 1924 г. Урысон утонул в море у берегов Бретани) Урысон доказал теорему о метризации нормальных пространств со счетной базой; для доказательства этой теоремы он изобрел лемму, названную его именем.

Последней работой Урысона была статья об универсальном метрическом пространстве (универсальном пространстве Урысона), в которое изометрически вкладывается любое метрическое пространство ограниченной мощности и диаметра.

Лемма Урысона считается важнейшим результатом общей топологии наряду с теоремой Тихонова о компактности произведения компактных пространств. Условие нормальности, которое требуется в лемме Урысона, совсем не ограничительно: как будет видно из следующей лекции, любое компактное хаусдорфово пространство нормально.

Из леммы Урысона следует чрезвычайно полезная *теорема Титце о продолжении* (Tietze extension theorem): если $A \subset M$ — замкнутое подмножество нормального топологического пространства и $f: A \to [0, 1]$ — непрерывная функция на A, то ее можно продолжить до непрерывной функции $F: M \to [0, 1]$, для которой $F|_A = f$.

Для доказательства этой теоремы требуется равномерная сходимость функций: надо записать f как сумму ряда, составленного из функций $f_i: M \to [0, \alpha_i]$, $\sum \alpha_i < 1$, постоянных на замкнутых подмножествах множества A, и продолжить каждую из этих функций до функции из M в $[0, \alpha_i]$ по лемме Урысона.

7.4. Нормальные пространства и нуль-множества

Пусть M — топологическое пространство. Напомним, что M *удовлетворяет аксиоме* T6, если оно хаусдорфово, нормально и каждое замкнутое подмножество в M получается как пересечение счетного числа своих окрестностей.

Утверждение 7.11. *Любое нормальное пространство M со счетной базой удовлетворяет аксиоме* T6.

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть $\{U_i\}$ — множество всех элементов из счетной базы топологии пространства M, обладающих тем свойством, что замыкание U_i не пересекается с A. Выведите из нормальности, что $\bigcup_i U_i = M \setminus A$.

Шаг 2. Возьмем для каждого U_i открытое множество $V_i := M \setminus \overline{U_i}$, где $\overline{U_i}$ — замыкание множества U_i. Пересечение всех V_i содержит A, поскольку $\overline{U_i}$ не пересекаются с A. С другой стороны,

$$\bigcap V_i \subset \bigcap_i (M \setminus U_i) = M \setminus \bigcup_i U_i = A.$$

Мы доказали, что в M выполняется аксиома T6. □

Теорема 7.12. *Пусть M — нормальное топологическое пространство, а $A \subset M$ — замкнутое подмножество. Тогда следующие свойства равносильны.*

1. *Множество A можно получить как пересечение счетного числа открытых окрестностей $W_i \supset A$.*

2. *Существует непрерывная функция $f: M \to [0, 1]$, для которой $A = f^{-1}(0)$.*

Доказательство. Из утверждения 2 легко следует утверждение 1. Действительно, $A = \bigcap_i f^{-1}([0, 1/2^i))$, а все эти множества открыты. Импликацию (1) $\Rightarrow$ (2) можно получить, немного видоизменив рассуждение, доказывающее лемму Урысона. Возьмем в качестве B пустое множество, и пусть $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ — последовательность открытых множеств, удовлетворяющая условию $\bigcap_i V_i = A$.

Будем строить набор открытых множеств $U_{m/2^n}$, $U_\lambda \Subset U_\mu$ для всех $\lambda < \mu$ таким образом, чтобы множество $U_{1/2^n}$ содержалось в V_n. Это можно осуществить, заменив на каждом шаге выбранное $U_{1/2^n}$ на $U_{1/2^n} \cap V_n$. Такая замена корректна, ибо всё, что требуется от $U_{1/2^n}$ условиями конструкции Урысона, — это выполнение соотношений $A \subset U_{1/2^n} \Subset U_{1/2^{n-1}}$, а при замене $U_{1/2^n}$ на $U_{1/2^n} \cap V_n$ это условие сохраняется.

Пусть
$$f(x) := \inf\{\lambda\colon\ x \in U_\lambda\}$$
— функция Урысона, построенная по набору $\{U_\lambda\}$ и принимающая значение 0 на A. Тогда $f^{-1}([0, 1/2^i)) \subset V_i$, а значит,
$$f^{-1}(0) = \bigcap_i f^{-1}([0, 1/2^i)) \subset \bigcap_i V_i = A. \qquad \square$$

Определение 7.13. Пусть $A \subset M$ — такое замкнутое подмножество, что для некоторой непрерывной функции $f\colon M \to [0, 1]$ выполняется равенство $A = f^{-1}(0)$. Тогда A называется *нуль-множеством*.

Таким образом, аксиома T6 для топологического пространства M равносильна тому, что M нормально и хаусдорфово, а всякое его замкнутое подмножество является нуль-множеством.

7.5. Теорема Урысона о метризации

Пусть M — нормальное хаусдорфово топологическое пространство. Тогда для любых двух разных точек $x, y \in M$ найдется функция Урысона $f_{x,y}\colon M \to [0, 1]$, принимающая значение 0 в точке x и 1 в точке y.

Возьмем в качестве множества индексов $\mathfrak{I} = M \times M \setminus \Delta$, где Δ — диагональ. Функции $f_{x,y}$ задают отображение
$$F := \prod_{(x,y)\in\mathfrak{I}} f_{x,y}\colon\ M \to [0, 1]^{\mathfrak{I}} \tag{7.5.1}$$
в тихоновский куб; по определению топологии произведения оно непрерывно. Поскольку $f_{x,y}(x) \neq f_{x,y}(y)$, отображение F инъективно.

Это утверждение не очень полезно. Из инъективности F не следует, что M гомеоморфно образу F, да и тихоновский куб $[0,1]^{\mathfrak{I}}$ неметризуем, если $\mathfrak{I}$ несчетно.

Немного видоизменив это рассуждение, можно добиться и того, и другого.

Теорема 7.14. *Пусть M — нормальное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Тогда существует непрерывное инъективное вложение $\Phi\colon M \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$ в счетное произведение отрезков. Более того, Φ является гомеоморфизмом M на его образ.*

Замечание 7.15. Из теоремы 7.14 немедленно следует теорема Урысона о метризации: любое нормальное хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой метризуемо. Действительно, M гомеоморфно подмножеству тихоновского куба $[0,1]^{\mathbb{N}}$, а тихоновский куб метризуем, ибо он гомеоморфен гильбертову кубу (об этом см. предыдущую лекцию).

Доказательство теоремы 7.14. Пусть $\{U_i\}$ — счетная база топологии M, и пусть $A_i := M \setminus U_i$. Поскольку M — нормальное хаусдорфово пространство со счетной базой, каждое A_i является нуль-множеством. В самом деле, из утверждения 7.11 следует, что в M выполнено условие T6. Из теоремы 7.12 следует, что в такой ситуации существует такая функция $f_i\colon M \to [0,1]$, что $f_i^{-1}(0) = A_i$.

Возьмем следующее отображение из M в тихоновский куб:

$$\prod_i f_i\colon M \to [0,1]^{\mathbb{N}}.$$

Поскольку U_i — это база хаусдорфовой топологии, для любых двух точек $x \neq y$ существует A_i, которое содержит x и не содержит y (докажите это). Поскольку $f_i^{-1}(0) = A_i$, соответствующая функция Урысона удовлетворяет условиям $f_i(x) = 0$, $f_i(y) \neq 0$. Поэтому отображение $\Phi := \prod_i f_i$ инъективно.

Для доказательства теоремы 7.14 осталось убедиться, что Φ — это гомеоморфизм пространства M на его образ. Априори это может быть и не так. Например, если M — пространство с дискретной топологией, то любое отображение $M \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ непрерывно, но не любое вложение — гомеоморфизм.

Чтобы Φ было гомеоморфизмом на его образ, нужно, чтобы любое открытое множество в M получалось как прообраз $\Phi^{-1}(U)$ для какого-то открытого множества $U \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$. Для открытых множеств, принадлежащих базе U_i, это верно, ибо $U_i = f_i^{-1}((0,1])$, а множество U_i будет прообразом открытого множества вида

$$[0, 1] \times [0, 1] \times \ldots \times (0, 1] \times [0, 1] \times \ldots \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}.$$

Поскольку каждое открытое множество в M получается объединением U_i, все открытые множества в M — прообразы открытых подмножеств в $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Поэтому Φ — гомеоморфизм. Мы доказали теорему Урысона. □

7.6. Теоремы о метризуемости

Теорема Урысона дает полную характеризацию метризуемых топологических пространств со счетной базой. Пространство со счетной базой является метризуемым тогда и только тогда, когда оно нормально и хаусдорфово.

Для пространств, не имеющих счетной базы, простого критерия метризуемости нет.

Существует много версий метризационной теоремы, не требующих счетной базы.

Самая полезная из них принадлежит Ю. М. Смирнову (1951) и требует определения паракомпактности. В дальнейшем это понятие использоваться не будет.

Определение 7.16. Покрытие $\{U_\alpha\}$ топологического пространства M называется *локально конечным*, если любая точка M содержится в окрестности, пересекающейся лишь с конечным числом элементов $\{U_\alpha\}$. Покрытие $\{V_\beta\}$ называется *измельчением* покрытия $\{U_\alpha\}$, если каждый элемент $\{V_\beta\}$ лежит в каком-то элементе $\{U_\alpha\}$. Топологическое пространство M называется *паракомпактным*, если каждое его покрытие имеет локально конечное измельчение.

Английский математик Артур Харольд Стоун (Arthur Harold Stone), изобретатель игрушки «флексагон», доказал в 1948 г., что все метрические пространства паракомпактны. Теорема Смирнова о метризации утверждает, наоборот, что любое паракомпактное топологическое пространство метризуемо, если оно *локально метризуемо*, т. е. если у каждой точки есть метризуемая окрестность. Таким образом, удается ответить на вопрос о метризуемости многообразий (топологических пространств, которые локально гомеоморфны $\mathbb{R}^n$).

Лекция 8

КОМПАКТЫ

8.1. Компакты и слабо секвенциально компактные пространства

Следующее определение всем хорошо знакомо.

Определение 8.1. Топологическое пространство M называется *компактным*, если каждое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Термин «компакт» введен Фреше, а современное понятие компакта принадлежит П. С. Урысону и П. С. Александрову.

Павел Сергеевич Александров (1896—1982)

Замечание 8.2. Замкнутое подмножество компакта, очевидно, компактно (докажите). Обратное, вообще говоря, неверно. В отличие от ситуации, известной из метрической топологии, компактные подмножества не обязательно замкнуты. Замкнутость компакта следует из хаусдорфовости.

Действительно, пусть $X \subset M$ — компактное подмножество в хаусдорфовом пространстве M, а z — точка его замыкания, не лежащая в X. Воспользовавшись хаусдорфовостью, найдем у каждой точки

$x \in X$ окрестность $U_x \ni x$, замыкание которой $\overline{U}_x$ не содержит z. Выбрав из $\{U_x\}$ конечное подпокрытие, получим покрытие U_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, множества X, причем для всех i замыкание $\overline{U}_i$ не содержит z. Воспользуемся равенством

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i$$

(докажите его). Получаем, что множество $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i$ замкнуто и не содержит z.

Замечание 8.3. Мы доказали, что всякое компактное подмножество в хаусдорфовом пространстве замкнуто. В нехаусдорфовом пространстве это не всегда верно (докажите).

Следующий элементарный факт чрезвычайно важен.

Утверждение 8.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда образ компактного подмножества X компактен* (см. лемму 4.8).

Доказательство. Пусть $Z \subset X$ — компактное подмножество, а $f(Z)$ — его образ. Возьмем открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ множества $f(Z)$. Прообразы элементов этого покрытия образуют покрытие $\{f(U_\alpha)\}$ компактного множества Z; выбрать из него конечное подпокрытие — значит выбрать конечное покрытие из $\{U_\alpha\}$. $\square$

Определение 8.5. Топологическое пространство M называется *слабо секвенциально компактным*, если каждая последовательность $\{x_i\}$ в M имеет предельную точку[1] (точку, в любой окрестности которой содержится бесконечное количество членов $\{x_i\}$).

Замечание 8.6. Для метрических пространств слабая секвенциальная компактность совпадает с обычной, как следует из теоремы Гейне—Бореля.

Утверждение 8.7. *Слабая секвенциальная компактность вытекает из обычной компактности.*

Доказательство. Пусть M — компактное топологическое пространство. Из компактности легко выводится, что последовательность вложенных непустых замкнутых подмножеств

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots$$

всегда имеет непустое пересечение. Пусть $\{x_i\}$ — последователь-

1 Такие точки еще называются *точками накопления*.

ность точек M, R_n — множество $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$, а $\overline{R}_n$ — его замыкание. Тогда пересечение $\bigcap_i \overline{R}_i$ непусто. Ясно, что это пересечение состоит из предельных точек последовательности $\{x_i\}$. Значит, M слабо секвенциально компактно. $\square$

Определение 8.8. Топологическое пространство M называется *счетно компактным*, если из любого его счетного покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение 8.9. *Пусть M — топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме Хаусдорфа* T1 *(все точки замкнуты). Тогда для M слабая секвенциальная компактность равносильна счетной компаткности.*

Доказательство. Пусть M счетно компактно, а $\{x_i\}$ — последовательность, не имеющая предельных точек. Положим $U_n := M \setminus \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. В силу T1 и отсутствия у $\{x_i\}$ предельных точек, все U_i открыты. Тогда $\{U_i\}$ — счетное покрытие M, не имеющее конечного подпокрытия. Если же, наоборот, M слабо секвенциально компактно, а $\{U_i\}$ — счетное покрытие, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия, рассмотрим $V_n := \bigcup_{i=1}^n U_i$. Легко видеть, что $\{V_i\}$ — тоже покрытие, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия, причем $V_{i-1} \subset V_i$ Выкинув совпадающие V_i, можно считать, что $V_{i-1} \subsetneq V_i$. Пусть последовательность $\{x_i\}$ выбрана таким образом, что $x_i \in V_i \setminus V_{i-1}$, а x — ее предельная точка. Предположим, что $x \in V_N$. Тогда бесконечное число элементов $\{x_i\}$ лежит в V_N, что невозможно по построению этой последовательности. $\square$

Любая непрерывная функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ на счетном компакте достигает максимума и минимума. Действительно, пуст ь $\{x_i\}$ — последовательность точек, для которой

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) = \sup_{y\in M} f(y),$$

а x — предельная точка этой последовательности. Поскольку функция f непрерывна, $f(x) = \sup\limits_{x\in M} f(x)$ (докажите).

Мы получили цепочку импликаций, верных для любого топологического пространства:

$$\text{компактность} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{слабая}\\ \text{секвенциальная}\\ \text{компактность}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{непрерывные функции}\\ \text{достигают минимума}\\ \text{и максимума}\end{array}$$

8.2. Компакты и нормальные пространства

Следующая простая теорема чрезвычайно полезна, потому что из нее вытекает существование функций Урысона на компактах.

Теорема 8.10. *Пусть M — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Тогда M нормально.*

Доказательство. *Шаг 1.* Докажем, что в M выполнена аксиома T3, т. е. для каждого замкнутого множества $A \subset M$ и точки $x \notin A$ существуют их непересекающиеся окрестности. Это равносильно тому, что у A есть окрестность, замыкание которой не содержит x.

Для каждой точки $z \in A$ выберем окрестность $U_z \ni z$, замыкание которой $\overline{U}_z$ не содержит x (такая окрестность существует в силу хаусдорфовости — докажите). Поскольку множество A компактно, а $\{U_z\}$ — его открытое покрытие, из $\{U_z\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_n$. Замыкание множества $\bigcup U_i$ не содержит x, потому что

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i. \tag{8.2.1}$$

Шаг 2. То же самое рассуждение позволяет вывести из аксиомы T3 и компактности выполнимость условия T4. Пусть A и B — два непересекающихся замкнутых подмножества пространства M. Нам нужно найти окрестность множества A, замыкание которой не пересекается с B. У каждой точки $z \in A$ есть окрестность U_z, замыкание которой не пересекается с B ввиду аксиомы T3. Выбрав из $\{U_z\}$ конечное подпокрытие, как на предыдущем шаге, мы получим конечное покрытие A множествами $U_1, \ldots, U_n$, для которого $\overline{U}_i \cap \cap B = \varnothing$. Снова воспользуемся соотношением (8.2.1) и получим, что $\bigcup U_i$ — окрестность A, замыкание которой не пересекается с B. $\square$

Для компакта проблема метризации дополнительно упрощается следующим простым и чрезвычайно важным наблюдением.

Утверждение 8.11. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное вложение хаусдорфовых топологических пространств, причем X — компакт. Рассмотрим образ $f(X) \subset Y$ как топологическое пространство с индуцированной топологией. Тогда f индуцирует гомеоморфизм X на $f(X)$.*

Доказательство. Для доказательства нам нужно убедиться, что образ открытого множества открыт в $f(X)$. Это равносильно тому, что образ замкнутого множества замкнут.

Как мы только что видели, образ компактного подмножества всегда компактен. Поскольку X компактно и хаусдорфово, компактность подмножества равносильна его замкнутости. Поэтому образ любого замкнутого подмножества $A \subset X$ компактен в Y, а следовательно, замкнут. $\square$

Мы использовали этот факт несколько лекций назад, при доказательстве того, что непрерывное взаимно однозначное отображение из отрезка в отрезок — это гомеоморфизм.

Замечание 8.12. Легко видеть, что из утверждения 8.11 и леммы Урысона следует, что всякое компактное хаусдорфово топологическое пространство M гомеоморфно подмножеству тихоновского куба $[0, 1]^{\mathfrak{I}}$, где $\mathfrak{I} = M \times M \setminus \Delta$. Непрерывное вложение $\Phi\colon M \to [0, 1]^{\mathfrak{I}}$ было задано формулой (7.5.1) с использованием леммы Урысона и нормальности M, доказанной для компактов чуть выше. В силу утверждения 8.11 отображение Φ является гомеоморфизмом M на его образ.

Лекция 9

ПРОИЗВЕДЕНИЕ КОМПАКТОВ

9.1. Открытые, замкнутые и собственные отображения

Определение 9.1. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Отображение f называется *собственным*, если прообраз любого компакта — компакт, *открытым*, если образ любого открытого множества открыт, и *замкнутым*, если образ любого замкнутого множества замкнут.

Замечание 9.2. Основной пример собственного отображения — непрерывное отображение из компакта X в хаусдорфово топологическое пространство Y. Действительно, прообраз компактного (следовательно, замкнутого) подмножества Y замкнут в X, т. е. компактен.

Кроме того, это отображение замкнуто. Действительно, любое замкнутое подмножество пространства X компактно, образ компакта компактен, а компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

Замечание 9.3. Приведем пример открытого отображения. Для любых топологических пространств X и Y проекция $X \times Y \xrightarrow{\pi} Y$ открыта. Для проверки этого достаточно убедиться что $\pi(W)$ открыт для любого множества из базы топологии на $X \times Y$. Выбрав базу из множеств вида $U \times V$, где U, V открыты в X, Y, мы получим, что $\pi(W) = V$ открыто.

Задача 9.1. Приведите пример непрерывного отображения хаусдорфовых пространств, которое а) замкнуто, но не открыто, б) открыто, но не замкнуто.

Замечание 9.4. Компактность топологического пространства M равносильна следующему свойству (докажите). Пусть $\{A_\alpha\}$ — набор замкнутых подмножеств M, обладающий тем свойством, что любое конечное подсемейство $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \{A_\alpha\}$ имеет общую точку. Тогда все A_i имеют общую точку. Действительно, $\bigcap_\alpha A_\alpha = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\{M \setminus A_\alpha\}$ — покрытие пространства M.

Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение. Напомним, что для любой точки $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ называется *слоем* отображения f.

Теорема 9.5. *Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое непрерывное отображение, причем все его слои компактны. Тогда отображение f собственное.*

Доказательство. Пусть $K \subset Y$ — компакт. Для доказательства 9.5 достаточно убедиться, что $f^{-1}(K)$ — компакт. Заменив Y на K, а X на $f^{-1}(K)$, можно считать Y компактом.

Шаг 1. Пусть $\{A_\alpha\}$ — такой набор замкнутых подмножеств в X, что любое конечное подмножество $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \{A_\alpha\}$ имеет общую точку. Добавив к набору $\{A_\alpha\}$ все конечные пересечения его элементов, получим набор замкнутых подмножеств пространства X, обладающий тем же свойством. Будем считать, что $\{A_\alpha\}$ содержит все конечные пересечения своих элементов.

Шаг 2. Поскольку Y компактно, а все $f(A_\alpha)$ замкнуты, набор $\{f(A_\alpha)\}$ имеет общую точку $y \in Y$ (докажите).

Шаг 3. Рассмотрим слой $f^{-1}(y) \subset X$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \{A_\alpha\}$. Любое конечное пересечение $\bigcap_i A_i$ лежит в наборе $\{A_\alpha\}$, а $f(A_\alpha) \ni \ni y$ для всех α. Значит, $\bigcap_i A_i$ пересекается с $f^{-1}(y)$. Мы получили, что любое конечное подмножество набора $\{A_\alpha \cap f^{-1}(y)\}$ имеет общую точку. Поскольку $f^{-1}(y)$ компактно, из этого следует, что набор $\{A_\alpha \cap f^{-1}(y)\}$ имеет общую точку. Это доказывает теорему 9.5. $\square$

9.2. Конечные произведения компактов

Теорема Тихонова утверждает, что любое (даже бесконечное) произведение компактов компактно. Для бесконечных произведений ее доказательство требует аксиомы выбора. Как доказал Джон Келли (John L. Kelley) в 1950 г., теорема Тихонова равносильна аксиоме выбора.

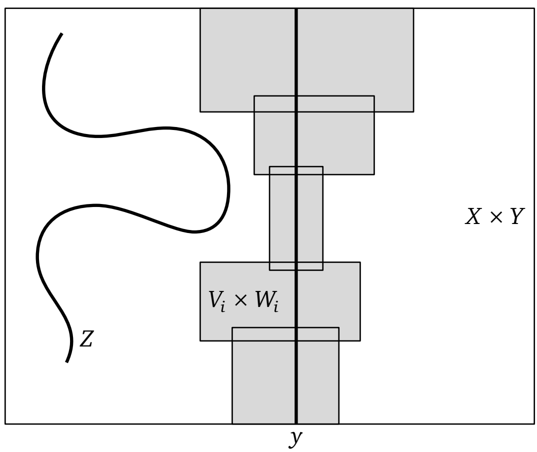
Для конечных произведений аксиома выбора не нужна, и компактность произведения компактов можно доказать непосредственно. К сожалению, доказательство получается чуть более сложным.

Пусть X, Y — компакты, а $\pi: X \times Y \to Y$ — проекция. Слои отображения π гомеоморфны X и поэтому компактны. Таким образом, компактность произведения $X \times Y$ вытекает из теоремы 9.5 и следующего утверждения.

Утверждение 9.6. *Пусть X, Y — топологические пространства, причем X компактно, а $\pi: X \times Y \to Y$ — проекция. Тогда отображение π замкнуто.*

Доказательство. Пусть $Z \subset X \times Y$ — замкнутое подмножество, а y — предельная точка множества $\pi(Z)$. Точка y лежит в $\pi(Z)$ тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(y) \cap Z \neq \varnothing$. Если $\pi(Z)$ незамкнуто, то для какой-то предельной точки имеем $\pi^{-1}(y) \cap Z = \varnothing$.

В этом случае у каждой точки $(x, y) \in \pi^{-1}(y)$ есть окрестность $U_{x,y}$, не пересекающаяся с Z. Выбрав $U_{x,y}$ в базе топологии, можно считать, что $U_{x,y} = V_{x,y} \times W_{x,y}$, где $V_{x,y} \subset X$ — окрестность точки $x \in \in X$, а $W_{x,y} \subset Y$ — окрестность точки $y \in Y$.



Проекция с компактным слоем замкнута

Множество $\{U_{x,y}\}$ задает покрытие множества $\pi^{-1}(y)$. Выберем у него конечное подпокрытие $\{V_i \times W_i\}$. Тогда $\{V_i\}$ составляет покрытие пространства X. Поэтому имеем

$$X \times \bigcap_i W_i \subset \bigcup_i V_i \times W_i$$

(проверьте). Следовательно, множество $X \times \bigcap_i W_i$ не пересекает Z. Поэтому точка y имеет окрестность $\bigcap_i W_i$, не пересекающую $\pi(Z)$, а значит, не является предельной точкой. Мы получили, что $\pi(Z)$ замкнуто. $\square$

Замечание 9.7. Без предположения о компактности X утверждение 9.6 неверно. Действительно, рассмотрим проекцию $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и гиперболу, т. е. замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, состоящее из пар $\{(x, y) : xy = 1\}$. Легко видеть, что $\pi(Z)$ незамкнуто (докажите).

Сравнивая утверждение 9.6 и теорему 9.5, мы получаем, что произведение компактных пространств компактно.

9.3. Максимальные идеалы в кольцах

Все кольца в этой лекции предполагаются коммутативными (с коммутативным умножением) и с единицей (таким элементом $1 \in \in R$, что $1 \cdot x = x$ для каждого x).

Напомним, что *идеалом* в кольце R называется подмножество $I \subset R$, которое является подгруппой по сложению и к тому же удовлетворяет следующему условию: для любых $x \in R$, $\gamma \in I$ произведение $x\gamma$ также лежит в I. Это свойство записывается так: $RI \subset I$.

Напомним, что *гомоморфизмом колец* называется отображение $\varphi: R_1 \to R_2$, которое переводит 1 в 1, 0 в 0 и согласовано со сложением и умножением (т. е. удовлетворяет условиям $\varphi(x + y) = = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$).

Ядром гомоморфизма $\varphi: R_1 \to R_2$ называется множество всех элементов R_1, переходящих в 0.

Легко видеть, что ядро гомоморфизма — идеал (проверьте). Для каждого идеала $I \subset R$ факторгруппа R/I наделяется естественной структурой кольца (проверьте). Таким образом, идеалы в кольце — подмножества, которые могут быть ядром гомоморфизма $R \to R_1$.

Определение 9.8. Пусть R — кольцо, а $S \subset R$ — набор элементов R. Рассмотрим множество $I \subset R$, состоящее из всех линейных комбинаций вида

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i,$$

где $s_i \in S$, а $\lambda_i \in R$. Легко видеть, что I — это идеал. Этот идеал называеся *идеалом, порожденным элементами множества S*.

Замечание 9.9. Пусть $r \in R$ — любой элемент, а rR — порожденное им подмножество R. Легко видеть, что $rR \neq R$ тогда и только тогда, когда когда r необратим[1] в R (проверьте это).

Поэтому любое кольцо R, в котором любой идеал равен R либо 0, является полем (докажите).

1 Напомним, что элемент $r \in R$ называется *обратимым в кольце R*, если $rr_1 = 1$ для какого-то $r_1 \in R$.

Определение 9.10. Пусть R — кольцо, а $I \subsetneq R$ — идеал. Идеал I называется *максимальным*, если не существует такого идеала I_1, что $I \subsetneq I_1 \subsetneq R$.

Утверждение 9.11. *Идеал $I \subset R$ максимален тогда и только тогда, когда факторкольцо R/I — поле.*

Доказательство. Легко видеть, что идеалы $I_1 \supset I$ находятся во взаимно однозначном соответствии с идеалами кольца R/I (проверьте это). Отсутствие идеалов $I \subsetneq I_1 \subsetneq R$ равносильно тому, что в R/I любой идеал равен 0 либо R. В силу замечания 9.9 это равносильно тому, что R/I — поле. □

Определение 9.12. Напомним, что идеал $I \subset R$ кольца R называется *простым*, если для любых $x, y \in R$ из того, что $xy \in I$, следует, что $x \in I$ либо $y \in I$.

Задача 9.2. Докажите, что любой максимальный идеал — простой.

Напомним, что набор подмножеств $S_1 \subset 2^M$ называется *монотонным*, или *вложенным*, если для любых $p, q \in S_1$ либо $p \subset q$, либо $q \subset p$. *Максимальным элементом* набора подмножеств $S \subset 2^M$ называется такой элемент $s \in S$, что для любого $r \in S$ из того, что $r \supset s$, следует, что $r = s$.

Напомним, что лемма Цорна (Zorn's Lemma) — следующее утверждение теории множеств, равносильное аксиоме выбора. Пусть $S = \{S_\alpha\} \subset 2^M$ — набор подмножеств множества M, которые удовлетворяют такому свойству: для любого монотонного поднабора $\{S_\beta\} \subset S$ объединение $\bigcup_\beta S_\beta$ тоже лежит в S. Тогда в S есть максимальный элемент.

Замечание 9.13. Довольно часто лемму Цорна формулируют более расширительно: вместо набора подмножеств рассматривается произвольное упорядоченное множество. Именно так формулируется лемма Цорна в главе 4 части I. Сам Цорн доказывал утверждение про подмножества, упорядоченные по возрастанию. Эти две формулировки равносильны.

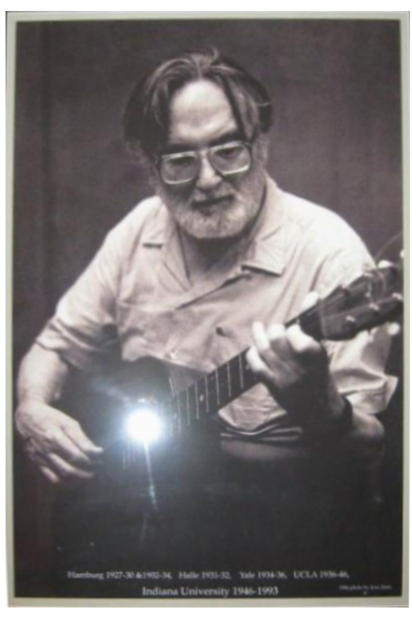
Из леммы Цорна немедленно следует существование максимальных идеалов.

Теорема 9.14. *Пусть $I \subsetneq R$ — идеал в кольце. Тогда существует максимальный идеал $I_1 \supset I$.*

Доказательство. Пусть $S \subset 2^R$ — множество идеалов, содержащих I и не равных R. Легко видеть, что для вложенного набора идеалов $\{I_\alpha\} \subset S$ объединение $\bigcup_\alpha I_\alpha$ — идеал, не равный R. Действительно, объединение любого набора вложенных идеалов снова идеал (проверьте это). Объединение $\bigcup_\alpha I_\alpha$ равно R, если $1 \in R$ лежит в каком-то из I_α, но это невозможно, потому что $I_\alpha \subsetneq R$. Применив лемму Цорна к $S \subset 2^R$, получим, что в S существует максимальный элемент. Он и будет максимальным идеалом, содержащим I. $\square$

9.4. Лемма Цорна: история, замечания

Лемма Цорна была доказана Максом Цорном в 1935 г.. Цорн был алгебраистом, учеником Эмиля Артина (Emil Artin). Абстрактная алгебра в 1930-е годы развивалась весьма бурно (трудами, в частности, Эмми Нетёр, Эмиля Артина и Бартеля ван дер Вардена), но для строгих доказательств приходилось постоянно прибегать к теории множеств. К тому времени эта наука была немало дискредитирована парадоксами. Примерно тогда же Гёдель доказал, что невозможно доказать ее непротиворечивость, и теория множеств оказалась неожиданно шатким фундаментом для математики.



Макс Август Цорн (Max August Zorn, 1906—1993)

Для доказательства существования максимальных идеалов до Цорна использовалась теорема Цермело о существовании полного порядка на любом множестве (в англоязычной литературе эта теорема известна как «well-ordering principle»). К теореме Цермело математики традиционно относятся с большим недоверием. («The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?» — шутка, приписываемая Джерри Боне.)

Цорн предложил строить абстрактную алгебру аксиоматически, не прибегая к сложным конструкциям вроде теоремы Цермело, и предложил лемму Цорна (которую он называл «принципом максимума») в качестве одной из аксиом. Основным (практически единственным) применением этой леммы в алгебре является теорема о существовании максимальных идеалов.

Впрочем, нетрудно доказать, что теорема о существовании максимальных идеалов равносильна аксиоме выбора.

Название «лемма Цорна» впервые использовано американским математиком Джоном Тьюки (John Tukey).

Помимо алгебры Цорн занимался теорией чисел и функциональным анализом. Среди прочего ему принадлежит аксиоматическое построение алгебры октав (octonions, Cayley numbers) и доказательство того, что квадрат любого бесконечного множества равномощен этому множеству.

9.5. Кольцо подмножеств и ультрафильтры

Определение 9.15. Пусть $A, B \subset M$ — подмножества в M. Определим *симметрическую разность* $A \triangle B$ формулой

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Определение 9.16. Пусть $S \subset 2^M$ — набор подмножеств в M. Мы говорим, что он *замкнут относительно конечных пересечений и симметрических разностей*, если пересечение и симметрическая разность любых двух его элементов снова лежит в S. Если набор S замкнут относительно конечных пересечений и симметрических разностей и к тому же содержит M, мы говорим, что S — *кольцо подмножеств в* M.

Замечание 9.17. Легко видеть, что 2^M является кольцом.

Определение 9.18. Пусть ν — подмножество в M. Рассмотрим следующую функцию $\chi_\nu\colon M \to \{0, 1\}$:

$$\chi_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \nu, \\ 0, & \text{если } x \notin \nu. \end{cases}$$

Эта функция называется *характеристической функцией* подмножества $\nu \subset M$. Отождествив $\{0, 1\}$ с полем $\mathbb{F}_2$ остатков по модулю 2, можно считать, что χ_ν — функция со значениями в $\mathbb{F}_2$.

Эта конструкция отождествляет 2^M с множеством функций $M \to \{0, 1\}$. В дальнейшем мы будем отождествлять подмножества и соответствующие им характеристические функции.

Пусть $S \subset 2^M$ — набор подмножеств в M. Для каждого $a \in S$ рассмотрим его характеристическую функцию $\chi_a\colon M \to \mathbb{F}_2$. Такие функции можно складывать и умножать почленно.

Утверждение 9.19. *Множество функций*

$$R_S := \{\chi_a\colon M \to \mathbb{F}_2,\ a \in S\}$$

образует кольцо относительно почленного сложения и умножения тогда и только тогда, когда S — кольцо подмножеств в M.

Доказательство. Для любых $\nu, \rho \subset M$ имеем

$$\chi_\nu + \chi_\rho = \chi_{\nu \triangle \rho}, \quad \chi_\nu \cdot \chi_\rho = \chi_{\nu \cap \rho},$$

поэтому замкнутость S относительно конечных пересечений и симметрических разностей равносильна замкнутости R_S относительно сложения и умножения. Наличие в этом множестве нуля очевидно, потому что $X \triangle X = \varnothing$, а $\chi_\varnothing$ равно нулю. Наличие в этом множестве единицы следует из того, что $M \in S$, а $\chi_M = 1$. □

Мы построили арифметические операции (сложение, умножение) на любом кольце подмножеств $S \subset 2^M$.

Замечание 9.20. Теорема о существовании максимальных идеалов, будучи примененной к кольцу подмножеств, дает сюръективный гомоморфизм колец $R_S \to k$, где k — некоторое поле. Легко видеть, что все элементы R_S удовлетворяют соотношению $a^2 = a$ (такие элементы называются *идемпотентами*). Поэтому все элементы поля k тоже идемпотенты. Поскольку все элементы поля k удовлетворяют условию $x^2 - x = x(x-1) = 0$, любой элемент $x \in k$ равен 0 или 1, так что k — поле из двух элементов.

Замечание 9.21. Пусть $I \subset R \subset 2^M$ — максимальный идеал в кольце подмножеств, $\varphi : R \to \mathbb{F}_2$ — проекция $R \to R/I$, а $A \in R$ — какой-то элемент. Поскольку $\chi_M = 1$, A либо $M \setminus A$ принадлежит I. Действительно, если A не принадлежит I, то $\varphi(A) = 1$, а значит,

$$\varphi(M \setminus A) = 1 - \varphi(A) = 0.$$

Определение 9.22. Пусть M — множество, 2^M — кольцо всех его подмножеств, а I — максимальный идеал в 2^M. *Ультрафильтром* на M называется множество всех $X \subset M$, не лежащих в I.

Определение 9.23. Пусть $x \in M$ — точка. Рассмотрим гомоморфизм $2^M \to \mathbb{F}_2$, ставящий в соответствие функции $\chi : M \to \mathbb{F}_2$ ее значение $\chi(x)$. Ядро этого отображения, очевидно, максимальный идеал. Дополнение к такому идеалу называется *главным ультрафильтром*. Главный ультрафильтр состоит из множества всех подмножеств $X \subset M$, содержащих x:

$$\bigcap_{B \notin I} B = \{x\}, \qquad \bigcup_{A \in I} A = M \setminus \{x\}$$

(последнее равенство следует из того, что $A \in I \Leftrightarrow (M \setminus A) \notin I$, что ясно из замечания 9.21).

Замечание 9.24. Многие математики считают, что понятие ультрафильтра парадоксально и использовать ультрафильтры не следует, наравне с теоремой Цермело и другими экзотическими следствиями аксиомы выбора. Действительно, ультрафильтры, кроме главных, невозможно построить явно. Если у вас понятие ультрафильтра вызывает отторжение, пропустите конец этого раздела и забудьте про ультрафильтры.

Ультрафильтры можно определить аксиоматически, что видно из следующей задачи.

Задача 9.3. Пусть M — множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ — набор его подмножеств. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

1) $\mathcal{U}$ — ультрафильтр;

2) выполнены следующие свойства:

• если $A \subset B$, $A \in \mathcal{U}$, то $B \in \mathcal{U}$;

• для любого $A \subset M$ либо A, либо $M \setminus A$ лежат в $\mathcal{U}$ (но не одновременно);

• если $A, B \in \mathcal{U}$, то $A \cap B \in \mathcal{U}$;

• $\varnothing \notin \mathcal{U}$.

Ультрафильтры были введены в 1937 г. Анри Картаном, одним из основателей группы Бурбаки, и широко использовались в трактатах Никола Бурбаки.

Анри Картан (Henri Cartan, 1904—2008)

Замечание 9.25. Пусть $S \subset 2^M$ — набор подмножеств. Рассмотрим идеал в 2^M, порожденный S. Он равен 2^M тогда и только тогда, когда M можно получить как объединение конечного поднабора в S (докажите).

Пусть теперь $S = \{X_\alpha\} \subset 2^M$ — набор подмножеств в M, обладающих тем свойством, что $\bigcup_\alpha X_\alpha = M$, но никакое конечное подмножество S не дает в объединении M. К примеру, если $M = \mathbb{Z}$, то можно взять в качестве S множество всех конечных подмножеств в $\mathbb{Z}$.

Идеал, порожденный S, не равен M в силу замечания 9.25. Поэтому он содержится в некотором максимальном идеале I. Поскольку

$$\bigcup_{A \in I} A \subset \bigcup_\alpha X_\alpha = M,$$

соответствующий ультрафильтр не главный.

Определение 9.26. *Аддитивной мерой* на кольце множеств $S \subset \subset 2^M$ называется такое отображение $\mu\colon S \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых непересекающихся множеств $A, B \in S$.

Задача 9.4. Пусть $\mathscr{U} \subset 2^M$ — некоторое подмножество. Рассмотрим отображение $\mu\colon 2^M \to \{0, 1\}$, переводящее A в 1, если $A \in \mathscr{U}$, и в 0, если $A \notin \mathscr{U}$. Докажите, что μ является аддитивной мерой тогда и только тогда, когда $\mathscr{U}$ — ультрафильтр.

Анри Картан придумал ультрафильтры, следуя идеям Клода Шевалле, хотя Шевалле впоследствии отказался от всех прав на это изобретение. Книги Бурбаки по основам топологии (в целом весьма неудачные) используют ультрафильтры и многие другие экзотические конструкции, после них практически не употреблявшиеся. В отличие от других изобретений Бурбаки, которые вообще никому не понадобились, понятие ультрафильтра оказалось полезным в логике, общей топологии и некоторых разделах алгебры.

9.6. Теорема Александера о предбазе

Утверждение 9.27. *Пусть M — топологическое пространство, а $\mathscr{V} \subset 2^M$ — его покрытие. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathscr{V}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *из $\mathscr{V}$ можно выбрать конечное подпокрытие;*

2) $I = 2^M$.

Доказательство. Если $U_1, \ldots, U_n$ — конечное подпокрытие, то объединение $\bigcup U_i = M$ выражается через пересечения и симметрические разности, а значит, принадлежит I. Мы получаем, что $1 \in I$, откуда следует, что $I = 2^M$.

Если же $I = 2^M$, имеем

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i,$$

где $\lambda_i \in 2^M$, а $U_i \in \mathscr{V}$. На языке множеств это равенство переписывается в виде

$$M = (\lambda_1 \cap U_1) \mathbin{\triangle} (\lambda_2 \cap U_2) \mathbin{\triangle} \ldots \mathbin{\triangle} (\lambda_n \cap U_n).$$

Поскольку $A \mathbin{\triangle} B \subset A \cup B$, имеем

$$M = (\lambda_1 \cap U_1) \mathbin{\triangle} (\lambda_2 \cap U_2) \mathbin{\triangle} \ldots \mathbin{\triangle} (\lambda_n \cap U_n) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,$$

так что в $\mathscr{V}$ найдется конечное подпокрытие. $\square$

Теорема 9.28 (теорема Александера о предбазе, «Alexander subbase theorem»). *Пусть M — топологическое пространство с предбазой $\{U_\alpha\}$. Предположим, что любое покрытие M элементами $\{U_\alpha\}$ имеет конечное подпокрытие. Тогда M компактно.*

Доказательство. Пусть M некомпактно, и пусть $\mathscr{P}$ — покрытие M, не допускающее конечного подпокрытия. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathscr{P}$. Абзацем выше доказано, что $I \neq 2^M$. Пусть $I_m \subset 2^M$ — максимальный идеал, содержащий I.

Шаг 1. Обозначим через $\mathscr{U}$ множество элементов предбазы $\{U_\alpha\}$, содержащихся в I_m. Докажем, что $\mathscr{U}$ — покрытие M. Поскольку I_m — идеал, вместе с любым множеством I_m содержит все его подмножества. По условию I_m содержит открытое покрытие M. Поэтому для всякой точки $x \in M$ и всякой базы топологии на M найдется элемент базы, который содержит x и содержится в I_m. Взяв в качестве базы конечные пересечения множеств U_α, мы получим

$$x \in \bigcap_i U_i \in I_m,$$

где U_i лежат в предбазе. Получаем, что $\bigcap_i U_i \in I_m$. Поскольку I_m — максимальный идеал, I_m — простой идеал. Значит, из того, что $\bigcap_i U_i \in I_m$, следует, что хотя бы одно из U_i лежит в I_m. Мы получили, что $x \in U_i \in \mathscr{U}$. Значит, $\mathscr{U}$ — покрытие.

Шаг 2. На предыдущем шаге мы получили, что $\mathscr{U}$ — покрытие M элементами предбазы. Поскольку $I_m \neq 2^M$, а $\mathscr{U} \subset I_m$, никакой конечный набор элементов $\mathscr{U}$ не дает в объединении M. Мы пришли к противоречию с условиями теоремы Александера о предбазе. Следовательно, M компактно. □

Замечание 9.29. Отметим, что из теоремы Александера о предбазе следует теорема Тихонова о компактности произведения (об этом ниже). Поэтому теорема Александера равносильна аксиоме выбора.

Американский математик Джеймс Александер прославился в основном как один из основателей современной алгебраической топологии. Ему принадлежит изобретение симплициальных пространств и когомологий. Кроме того, Александер изучал теорию узлов и немало ее развил. Он определил инвариант узлов, который сейчас называется его именем (инвариант Александера).

Александер происходил из очень влиятельной американской семьи и был миллионером. Несмотря на это, он был чрезвычайно

Джеймс Уэделл Александер
(James Waddell Alexander, 1888—1971)

левых взглядов. Когда в 1950-х годах в Америке начались гонения на социалистов, Александер стал одной из жертв преследований; в 1951 г. ему пришлось уйти из Принстонского университета и Института перспективных исследований, где он работал. Александер дожил до 1971 года фактическим отшельником, не появляясь на людях. Единственное публичное выступление Александера случилось в 1954 г. — он подписал открытое письмо в защиту физика Роберта Оппенгеймера, директора Манхэттенского проекта, которого в 1954 г. выгнали с работы за политику.

Также Александер был знаменитым альпинистом.

9.7. Теорема Тихонова о компактности

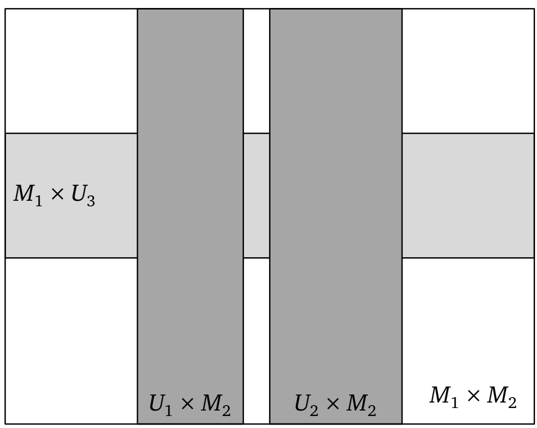
Пусть $\{M_\alpha\}$ — набор множеств. Рассмотрим объединение всех этих множеств (которые считаются непересекающимися). Оно обозначается $\bigsqcup M_\alpha$.

Определение 9.30. Пусть $\{M_\alpha\}$ — набор топологических пространств, проиндексированный множеством индексов $\mathfrak{I}$. Напомним, что *произведение* пространств M_α — это множество отображений из $\mathfrak{I}$ в $\bigsqcup M_\alpha$, ставящих в соответствие каждому индексу

$\alpha \in \mathfrak{I}$ точку пространства M_α. На $\prod_\alpha M_\alpha$ вводится *тихоновская топология*, заданная следующей предбазой. Для каждой пары $\alpha \in \mathfrak{I}$ и открытого множества $U \subset M_\alpha$ рассмотрим подмножество

$$M_{\alpha_1} \times \ldots \times U_\alpha \times \ldots \subset M_{\alpha_1} \times \ldots \times M_\alpha \times \ldots$$

(произведение набора $\{M_\alpha\}$, где элемент M_α заменили на U_α, а все остальные оставили как есть). Обозначим это подмножество $\mathscr{F}_{\alpha,U}$. Топология, заданная такой предбазой, называется *тихоновской топологией*, или *топологией произведения*.



Три элемента предбазы, покрывающие
часть произведения $M_1 \times M_2$

Теорема 9.31 (теорема Тихонова о компактности). *Пусть все топологические пространства M_α компактны. Тогда $\prod_\alpha M_\alpha$ тоже компактно.*

Доказательство. Теорема Тихонова сразу следует из теоремы Александера о предбазе. Пусть $\{\mathscr{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}}\}$ — набор элементов предбазы. Легко видеть, что

$$\bigcup_{\alpha,\xi} \mathscr{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}} = \bigcup_\alpha \mathscr{F}_{\alpha,W_\alpha},$$

где $W_\alpha = \bigcup_\xi U_{\alpha,\xi}$. Если для каждого α имеем $W_\alpha \neq M_\alpha$, выберем точку $x_\alpha \in M_\alpha \setminus W_\alpha$, и тогда точка $\prod_\alpha x_\alpha$ не лежит в $\bigcup_\alpha \mathscr{F}_{\alpha,W_\alpha}$.

Мы получаем, что $\{\mathscr{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}}\}$ является покрытием, если и только если $\bigcup_\xi U_{\alpha,\xi} = M_\alpha$ для какого-то α. Это значит, что $U_{\alpha,\xi}$ является открытым покрытием пространства M_α. Поскольку M_α компактно, в $U_{\alpha,\xi}$ есть конечное подпокрытие $U_{\alpha,i}$. Тогда $\mathscr{F}_{\alpha,U_{\alpha,i}}$ будет конечным покрытием $\prod_\alpha M_\alpha$. Мы доказали, что из любого покрытия $\prod_\alpha M_\alpha$ элементами предбазы можно выбрать конечное подпокрытие. Теперь из теоремы Александера вытекает, что $\prod_\alpha M_\alpha$ компактно. $\square$

Лекция 10

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

10.1. Банаховы пространства

Определение 10.1. Пусть (V, ν) — векторное пространство с нормой. Напомним, что пространство (V, ν) называется *банаховым*, если оно полно как метрическое пространство.

Замечание 10.2. Пусть (V, ν_2) — конечномерное пространство с евклидовой нормой, заданной соотношением $\nu_2(v) = g(v, v)$, где g — билинейная симметричная невырожденная форма. В лекции 2 мы доказали, что тождественный изоморфизм $\mathrm{Id}\colon (V, \nu) \to (V, \nu_2)$ является липшицевым и обратное ему отображение тоже липшицево (такие отображения называются *билипшицевыми*). Из этого следует, что отображение $\mathrm{Id}\colon (V, \nu) \to (V, \nu_2)$ переводит последовательности Коши в последовательности Коши. Поэтому (V, ν) полно.

Мы доказали следующее утверждение

Утверждение 10.3. *Любое конечномерное нормированное пространство*[1] *банахово.*

Отметим также, что единичный шар в (V, ν) компактен. Действительно, он является замкнутым и ограниченным подмножеством в евклидовом пространстве (V, ν_2), что следует из билипшицевости тождественного отображения $\mathrm{Id}\colon (V, \nu) \to (V, \nu_2)$.

Следующая полезная теорема была доказана Ф. Риссом.

Теорема 10.4. *Пусть (V, ν) — нормированное пространство, а $\overline{B}_1 \subset V$ — единичный замкнутый шар в V. Если $\overline{B}_1$ компактен, то V конечномерно.*

Доказательство. *Шаг 1.* Если шар $\overline{B}_1$ компактен, то из его покрытия открытыми шарами радиуса $1/2$ можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — центры шаров, которые составляют это подпокрытие. Тогда для каждого $v \in V$, $|v| \leqslant 1$, для какого-то x_i имеет место неравенство $|v - x_i| < 1/2$.

Шаг 2. Следовательно, для каждого $w \in V$, удовлетворяющего условию $|w| \leqslant \lambda$, и для какого-то $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ имеет место неравенство $|w - \lambda x_i| < \lambda/2$.

1 *Нормированное пространство* — пространство с нормой.

Шаг 3. Возьмем какой-то элемент $v \in V$, $|v| \leqslant 1$. Выберем $x_{i_1} \in \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, для которого $|v - x_{i_1}| < 1/2$. Применив утверждение предыдущего шага к $w = v - x_{i_1}$, $\lambda = 1/2$, получим, что

$$\left| v - x_{i_1} - \frac{1}{2} x_{i_2} \right| < \frac{1}{4}$$

для какого-то $x_{i_2} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Применим утверждение предыдущего шага к $w = v - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} x_{i_k}$, $\lambda = 1/2^{n-1}$ и, пользуясь индукцией, получим

$$\left| v - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} x_{i_k} \right| < \frac{1}{2^n}.$$

Шаг 4. Мы доказали, что

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} x_{i_k}.$$

Следовательно, v принадлежит линейной оболочке векторов $x_1, \ldots, x_n$, которая, таким образом, должна содержать V целиком. Поэтому V конечномерно. □

Пусть M — топологическое пространство. Напомним, что функцию $f: M \to \mathbb{R}$ называют *ограниченной*, если $\sup\limits_{x \in M} |f(x)| < \infty$. Пусть $C_b(M)$ — пространство непрерывных ограниченных вещественнозначных функций на M. Положим

$$|f| := \sup_{x \in M} |f(x)|.$$

Легко видеть, что это норма (докажите). Такая норма называется *L^∞-нормой* или sup-*нормой* на пространстве непрерывных ограниченных вещественнозначных функций.

Определение 10.5. Топология, определяемая sup-нормой на пространстве непрерывных ограниченных функций $C_b(M)$, называется *топологией равномерной сходимости*. Последовательность функций, которая сходится в такой топологии, называется *равномерно сходящейся*.

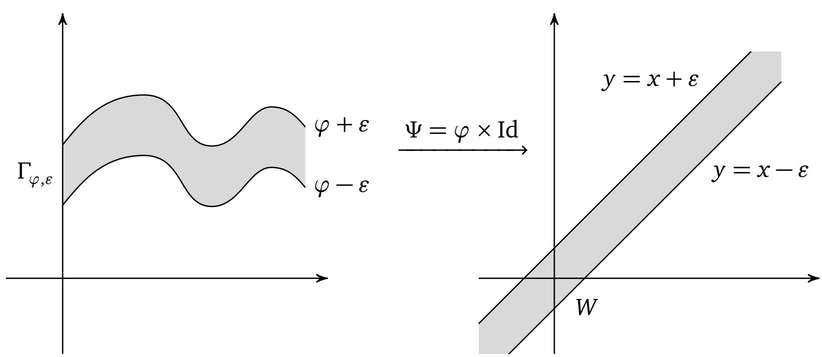
Теорема 10.6. *Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций непрерывен. Более того, пространство $C_b(M)$ с* sup-*нормой банахово.*

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть $\{f_i\}$ — последовательность Коши ограниченных функций. Поскольку

$$|f_i(y)-f_j(y)| \leqslant \sup_{x\in M} |f_i(x)-f_j(x)|,$$

для каждой точки $y \in M$ последовательность $\{f_i(y)\}$ — последовательность Коши. Поэтому f_i поточечно сходятся к функции $f: M \to \to \mathbb{R}$.

Шаг 2. Пусть $\varphi: M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} \subset M \times \mathbb{R}$ — объединение всех ε-отрезков вида $m \times [\varphi(m)-\varepsilon, \varphi(m)-\varepsilon]$. Можно думать про $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ как про объединение графиков функций $\varphi + c$, где $c \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Докажем, что множество $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ замкнуто. Для этого рассмотрим отображение $\Psi = \varphi \times \mathrm{Id}: M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Легко видеть, что $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} = \Psi^{-1}(W)$, где W — замкнутое подмножество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, составленное из всех пар (x, y), для которых $|x-y| \leqslant \varepsilon$. Поскольку W замкнуто, а отображение Ψ непрерывно, $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ также замкнуто.



Множество $\Gamma_{f,\varepsilon}$ получено как $\Psi^{-1}(W)$

Шаг 3. Для каждого i обозначим через ε_i число $|f-f_i|$. График Γ_f лежит в замкнутом множестве $\Gamma_{f_i,\varepsilon_i}$. Поскольку последовательность $\{\varepsilon_i\}$ сходится к нулю, имеем

$$\Gamma_f = \bigcap_i \Gamma_{f_i,\varepsilon_i}.$$

График Γ_f является пересечением замкнутых множеств, поэтому он замкнут.

Шаг 4. Поскольку функция f ограниченна, можно рассматривать ее как функцию $f: M \to [-C, C]$. Пусть $\pi: M \times [-C, C] \to M$ —

обычная проекция. Легко видеть, что $f^{-1}([a,b]) = \pi(\Gamma_f \cap M \times [a,b])$. Поскольку проекция $\pi\colon M \times [-C,C] \to M$ имеет компактные слои, она замкнута (это было доказано на прошлой лекции). Поэтому $f^{-1}([a,b]) = \pi(\Gamma_f \cap M \times [a,b])$ замкнуто, а значит, прообраз любого открытого интервала в $[-C,C]$ открыт. Поскольку открытые интервалы являются базой топологии, функция f непрерывна. Мы доказали, что $\{f_i\}$ равномерно сходится к непрерывной функции. $\square$

10.2. Примеры пространств Фреше

Пусть V — топологическое векторное пространство с хаусдорфовой топологией, заданной системой полунорм $\{\nu_\alpha\}$. Напомним, что V называется *пространством Фреше*, если каждая последовательность $\{x_i\}$, являющаяся последовательностью Коши относительно всех полунорм ν_α, сходится к некоторому $x \in V$.

Пусть M — локально компактное топологическое пространство, а V — пространство непрерывных функций на M. Для каждого компактного подмножества $K \subset M$ рассмотрим полунорму на V, заданную формулой
$$|f|_K := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$
Поскольку множество K компактно, а функция f непрерывна, имеем $\sup\limits_{x \in K} |f(x)| < \infty$.

Эта система полунорм задает на V топологию, которая называется *топологией равномерной сходимости на компактах*. Легко видеть, что V является пространством Фреше (докажите).

Другой пример пространства Фреше получается, если рассмотреть пространство $C^\infty([0,1])$ гладких функций на отрезке. Рассмотрим для каждого n норму $|f|_{C^n}$, определенную следующим образом:
$$|f|_{C^0} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad |f|_{C^1} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + |f'(x)|, \quad \ldots,$$
$$|f|_{C^n} := \sup_{x \in [0,1]} \sum_{i=0}^{n} |f^{(i)}(x)|.$$
Легко видеть, что
$$|\varphi|_{C^n} \geqslant |\varphi^{(k)}|_{C^{n-k}}$$
для любой n-кратно дифференцируемой функции φ (проверьте это).

В частности, $\{f_i^{(k)}\}$ — последовательность Коши в C^{n-k}-топологии, если $\{f_i\}$ — последовательность Коши в C^n-топологии.

Поскольку предел по C^0-норме непрерывен, как было доказано выше, предел по C^k-норме — k раз дифференцируемая функция. Действительно, f_i является k-кратной первообразной для $f_i^{(k)}$, значит, f является k-кратной первообразной для $f^{(k)} := \lim f_i^{(k)}$ (чтобы проверить это, докажите, что взятие первообразной перестановочно с взятием равномерного предела).

Замечание 10.7. Мы получили, что пространство $C^k([0,1])$ k раз дифференцируемых функций на $[0,1]$ полно относительно нормы $|\cdot|_{C^k}$. Действительно, пусть $\{f_i\}$ — последовательность Коши относительно этой нормы. Поскольку $|\cdot|_{C^k} \geqslant |\cdot|_{C^0}$, из теоремы 10.6 следует, что любая последовательность Коши в норме $|\cdot|_{C^k}$ сходится к непрерывной функции. В силу вышесказанного эта функция k раз дифференцируема.

Рассмотрим пространство $C^\infty([0,1])$ с системой норм, заданных C^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ В силу вышесказанного, если последовательность $\{f_i\}$ сходится во всех этих нормах, то предел этой последовательности гладкий. Поэтому $C^\infty([0,1])$ — пространство Фреше.

10.3. Равномерная метрика на пространстве отображений

Определение 10.8. Пусть X — топологическое пространство, а Y — метрическое пространство. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *ограниченным*, если $f(X)$ лежит в шаре $B_r(y)$ для каких-то $y \in Y$ и $r \in \mathbb{R}$.

На множестве $\mathrm{Map}_b(X,Y)$ ограниченных отображений из X в Y определена sup-*метрика* (или «равномерная метрика») формулой $d(f_1, f_2) := \sup\limits_{x\in X} d(f_1(x), f_2(x))$ (проверьте, что это метрика). Эта же метрика определяется на $C_b(M)$ посредством sup-нормы (проверьте). То же самое рассуждение, что доказывает теорему 10.6 о банаховости $C_b(M)$, доказывает полноту пространства $C_b(X,Y)$ непрерывных ограниченных отображений. Для доказательства надо убедиться, что последовательность Коши отображений $\{f_i\} \in$ $\in C_b(X,Y)$ сходится поточечно к отображению $f \in \mathrm{Map}_b(X,Y)$, а затем воспользоваться замкнутостью графика f, чтобы доказать его непрерывность. Для этого используется такая лемма.

Лемма 10.9. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— отображение топологических пространств, причем график* $\Gamma_f \subset X \times Y$ *замкнут. Предположим, что* Y *компактно. Тогда* f *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\pi_X\colon X \times Y \to X$ — отображение проекции. Для каждого замкнутого подмножества $A \subset Y$ имеем

$$f^{-1}(A) = \pi_X(\Gamma_f \cap X \times A).$$

Если Y компактно, то отображение π_X замкнуто (см. лекцию 9), поэтому множество

$$\pi_X(\Gamma_f \cap X \times A)$$

тоже замкнуто, а значит, f непрерывно (докажите). □

Теорема 10.10. *Пусть* X *— топологическое пространство,* Y *— полное метрическое пространство, а* $C_b(X, Y)$ *— пространство непрерывных ограниченных отображений с* sup*-метрикой. Предположим, что любой замкнутый шар в* Y *компактен. Тогда* $C_b(X, Y)$ *полно.*

Доказательство теоремы 10.10. *Шаг 1.* Поскольку

$$d(f_1(x), f_2(x)) \leqslant d(f_1, f_2),$$

любая последовательность Коши $\{f_i\}$ отображений поточечно сходится к ограниченному отображению $f \in \mathrm{Map}_b(X, Y)$. Для доказательства полноты $C_b(X, Y)$ осталось проверить, что f непрерывно.

Шаг 2. Предположим, что любой замкнутый шар в Y компактен. Тогда для любой последовательности Коши $\{f_i\} \in \mathrm{Map}_b(X, Y)$ все ее элементы лежат в каком-то замкнутом шаре. Поэтому можно считать Y компактным, а значит, выполнено условие леммы 10.9. Тогда для доказательства непрерывности отображения f достаточно убедиться в том, что его график замкнут.

Шаг 3. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, где X — топологическое пространство, а Y — метрическое пространство. Обозначим через $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} \subset X \times Y$ множество

$$\Gamma_{\varphi,\varepsilon} = \{(x, y) \in X \times Y\colon\ d(f(x), y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Докажем, что $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ замкнуто. В самом деле, пусть $\Psi\colon X \times Y \to Y \times Y$ отображает (x, y) в $(\varphi(x), y)$, и пусть $A_\varepsilon \subset Y \times Y$ — множество всех пар (y_1, y_2), для которых $d(y_1, y_2) \leqslant \varepsilon$. Множество A_ε, очевидно, замкнуто (проверьте), а $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} = \Phi^{-1}(A_\varepsilon)$, значит, оно тоже замкнуто.

Шаг 4. Пусть $\varepsilon_i = d(f, f_i)$. Тогда

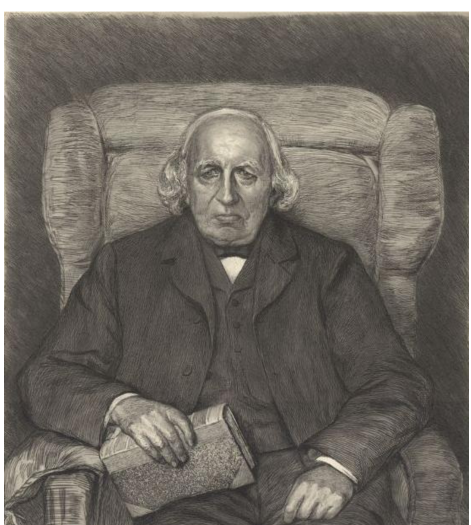
$$\Gamma_f = \bigcap_i \Gamma_{f_i, \varepsilon_i}$$

(проверьте). Значит, Γ_f — пересечение замкнутых множеств, и оно замкнуто. В силу шага 2 из этого следует непрерывность отображения f. Мы доказали теорему 10.10. □

10.4. История, замечания

В 1821 г. Огюстен Коши опубликовал неправильное доказательство того, что поточечный предел непрерывных функций непрерывен. В скором времени Абель и Фурье нашли контрпримеры к этому утверждению, а Дирихле обнаружил ошибку в доказательстве Коши.

Определение равномерной сходимости принадлежит, судя по всему, Кристофу Гудерману (Christoph Gudermann). В 1841 г. ученик Гудермана Карл Вейерштрасс опубликовал определение равномерной сходимости, и придумал немецкий термин gleichmäßige Konvergenz, который переводится как «равномерная сходимость» (по-английски — uniform convergence).



Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс
(Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815—1897)

Лекция 11

ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

11.1. Топология равномерной сходимости на $C(X, Y)$

Пусть X — компактное топологическое пространство, Y — метрическое пространство, а $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений из X в Y. Напомним, что на $C(X, Y)$ определена sup-*метрика* по формуле

$$d(f, f') = \sup_{x \in X} d(f(x), f'(x)).$$

Конечность супремума следует из компактности X (докажите).

Напомним, что *окрестность* подмножества Z топологического пространства — это открытое множество, которое содержит Z.

Пусть Δ_ε обозначает окрестность диагонали Δ в $Y \times Y$, заданную формулой

$$\Delta_\varepsilon = \{(y, y') \in Y \times Y \colon d(y, y') < \varepsilon\}.$$

Для каждого непрерывного отображения $\varphi \colon X \to Y$ рассмотрим $\Phi = \varphi \times \mathrm{Id}_Y \colon X \times Y \to Y \times Y$. Легко видеть, что график Γ_φ получается как $\Gamma_\varphi = \varphi^{-1}(\Delta)$.

Пусть $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} := \Phi^{-1}(\Delta_\varepsilon)$ — окрестность графика Γ_φ, полученная как прообраз множества Δ_ε.

Замечание 11.1. На прошлой лекции мы доказали, что $d(\varphi, \varphi') < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда график $\Gamma_{\varphi'}$ целиком лежит в $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$.

Определение 11.2. Пусть отображение $\mathrm{ev} \colon X \times C(X, Y) \to Y$ переводит пару (x, φ) в $\varphi(x)$. Это отображение называется *отображением эвалюации* (вычисления).

Основное утверждение этой лекции — следующая теорема.

Теорема 11.3. *Пусть X — компактное топологическое пространство, Y — метрическое пространство, а $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений из X в Y с топологией равномерной сходимости. Предположим, что у X есть счетная база окрестностей в каждой точке. Тогда отображение эвалюации* $\mathrm{ev} \colon X \times C(X, Y) \to Y$ *непрерывно. Более того, топология равномерной сходимости — самая слабая топология, в которой* ev *непрерывно.*

Замечание 11.4. Из теоремы 11.3 сразу следует, что топология равномерной сходимости на $C(X, Y)$ целиком определяется топологической структурой пространств X и Y.

Замечание 11.5. Напомним, что отображение топологических пространств называется *секвенциально непрерывным*, если оно переводит пределы последовательностей в пределы последовательностей. Секвенциальная непрерывность отображения ev немедленно следует (проверьте) из неравенства треугольника

$$d(f_i(x_i), f(x)) \leqslant d(f_i(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)),$$

где $\{f_i\} \in C(X, Y)$ — последовательность функций, равномерно сходящихся к f, а $\{x_i\} \in X$ — последовательность точек, сходящихся к x.

Замечание 11.6. Для пространств со счетной базой окрестностей в точке секвенциальная непрерывность равносильна обычной (докажите это). Поэтому отображение $\mathrm{ev}\colon X \times C(X, Y) \to Y$ непрерывно, если X удовлетворяет первой аксиоме счетности (докажите).

Мы завершим доказательство теоремы 11.3 в конце следующего раздела.

11.2. Топология, заданная окрестностями графика

Пусть X, Y — топологические пространства, а $C(X, Y)$ — множество всех непрерывных отображений из X в Y.

Пусть W — подмножество в $X \times Y$. Рассмотрим множество $\mathfrak{S}_W$ в $C(X, Y)$, состоящее из всех непрерывных отображений $f \in C(X, Y)$, для которых график Γ_f лежит в W. Пусть $C'(X, Y)$ — пространство непрерывных функций с топологией, базой которой является множество всех $\mathfrak{S}_W$, где W — объединение конечного числа открытых подмножеств $U \times V \subset X \subset Y$ с подмножествами вида $K \times Y$, где $K \subset X$ замкнуто.

Рассмотрим отображение $\Phi\colon X \times C'(X, Y) \to X \times Y$, переводящее (x, φ) в $(x, \varphi(x))$. Для каждого открытого множества $U \times V \subset X \times Y$ пусть

$$W := U \times V \cup (X \setminus U) \times Y.$$

Из определения $\mathfrak{S}_W$ сразу следует, что

$$\Phi^{-1}(U \times V) = U \times \mathfrak{S}_W.$$

Действительно, для каждого $\varphi \in C(X, Y)$ образ $\varphi(U)$ лежит в V тогда и только тогда, когда график φ лежит в W. Следовательно, отображение $\Phi\colon X \times C'(X, Y) \to X \times Y$ непрерывно. Поскольку отображение эвалюации получается как композиция Φ и проекции, мы получаем, что отображение $\mathrm{ev}\colon X \times C'(X, Y) \to Y$ непрерывно.

По определению база открытых множеств в $C'(X, Y)$ порождена множествами вида $\mathfrak{S}_W$, где $W = U \times V \cup (X \setminus U) \times Y$. Эта база получается из прообразов $\pi(\Phi^{-1}(A))$, где $\pi\colon X \times C'(X, Y) \to C'(X, Y)$ — естественная проекция, а $A = U \times V$ открыто в $X \times Y$. Поэтому топология $C'(X, Y)$ есть слабейшая топология, в которой Φ непрерывно.

Замечание 11.7. Непрерывность отображения $\Phi\colon X \times C(X, Y) \to \to X \times Y$ в какой-то топологии на $C(X, Y)$ равносильна непрерывности ev в этой же самой топологии. Действительно, ev получается композицией Φ и проекции, а Φ получается как произведение ev и проекции $X \times C(X, Y) \to X$.

Мы получили, что $C'(X, Y)$ — слабейшая топология, в которой непрерывно отображение ev. Для доказательства теоремы 11.3 осталось доказать, что топология $C'(X, Y)$ эквивалентна топологии $C(X, Y)$.

Пусть X — компактное топологическое пространство с первой аксиомой счетности, а Y — метрическое пространство. Для доказательства теоремы 11.3 рассмотрим тождественное отображение

$$\mathrm{Id}\colon C'(X, Y) \to C(X, Y).$$

База открытых множеств в $C(X, Y)$ состоит из множеств вида $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\varphi,\varepsilon}}$ (замечание 11.1). Такие множества открыты в $C'(X, Y)$ по определению топологии на $C'(X, Y)$. Поэтому отображение $\mathrm{Id}\colon C'(X, Y) \to \to C(X, Y)$ непрерывно, т. е. топология, определенная $\mathfrak{S}_W$, сильнее, чем топология равномерной сходимости.

С другой стороны, поскольку $C'(X, Y)$ — слабейшая топология, в которой непрерывно отображение эвалюации, а отображение $\mathrm{ev}\colon X \times C(X, Y) \to Y$ непрерывно, топология $C'(X, Y)$ слабее, чем топология $C(X, Y)$. Мы доказали, что эти топологии эквивалентны.

Утверждение 11.8. *Пусть Y — компактное метрическое пространство, Z — метрическое пространство, а X компактно. Тогда отображение композиции $A\colon C(X, Y) \times C(Y, Z) \to C(X, Z)$ непрерывно.*

Доказательство. Отображение $A\colon C(X,Y)\times C(Y,Z)\to C(X,Z)$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение

$$\mathrm{Id}_X\times A\colon\; X\times C(X,Y)\times C(Y,Z)\to X\times C(X,Z)$$

непрерывно. По теореме 11.3 база топологии на $X\times C(X,Z)$ порождается множествами вида $\mathrm{ev}^{-1}(U)$, где $U\subset Z$ — открытое множество. Поэтому для доказательства непрерывности композиции достаточно доказать, что отображение $\mathrm{ev}^2(X\times C(X,Y)\times C(Y,Z))\to \to Z$, $(x,\varphi,\psi)\to\psi(\varphi(x))$, непрерывно. С другой стороны, ev^2 получается применением эвалюации два раза: первый раз $(x,\varphi,\psi)\to \to(\varphi(x),\psi)$, а второй раз — $(\varphi(x),\psi)\to\psi(\varphi(x))$, и каждая из этих эвалюаций непрерывна, что следует из теоремы 11.3. □

11.3. Замечания

Топология на $C(X,Y)$, определенная выше, является примером *компактно-открытой топологии*, которая определена для любого локально компактного пространства X и любого (не обязательно

Ральф Харцлер Фокс (Ralph Hartzler Fox, 1913—1973) метризуемого) Y. Для компактного подмножества $K \subset X$ и открытого подмножества $U \subset Y$, пусть $\mathscr{V}(K, U)$ — множество отображений, переводящих K в U. Компактно-открытая топология (compact-open topology) на $C(X, Y)$ — топология, заданная предбазой $\mathscr{V}(K, U)$.

Задача 11.1*. Докажите, что компактно-открытая топология эквивалентна топологии равномерной сходимости, если X компактно, а Y метризуемо.

Задача 11.2*. Докажите, что отображение композиции $C(X, Y) \times C(Y, Z) \to C(X, Z)$ непрерывно относительно компактно-открытой топологии, если X, Y, Z хаусдорфовы.

Компактно-открытую топологию изобрел в 1945 г. Ральф Фокс, ученик Соломона Лефшеца, который был научным руководителем многих знаменитых математиков, в частности Джона Милнора и Барри Мазура.

Лекция 12

СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

12.1. Свойства связных подмножеств

Определение 12.1. Пусть M — топологическое пространство, а $A \subset M$ — его подмножество, которое открыто и замкнуто. Тогда A называется *открыто-замкнутым* (clopen).

Замечание 12.2. Очевидно, M и $\varnothing$ открыто-замкнуты. Если у M есть открыто-замкнутое подмножество U, не равное M и $\varnothing$, то M можно разбить в объединение двух непересекающихся непустых открытых подмножеств U и $M \setminus U$. Обратное тоже верно (докажите).

Определение 12.3. Пусть M — топологическое пространство, а $X \subset M$ — его подмножество, рассматриваемое как топологическое пространство с индуцированной топологией. Тогда X называется *связным* (connected), если верны следующие равносильные условия:

1) X не содержит открыто-замкнутых подмножеств, кроме X и $\varnothing$;

2) X не может быть разбито в объединение двух непересекающихся непустых открытых подмножеств.

Утверждение 12.4. *Связное подмножество отрезка* $[0,1]$ — *это отрезок, интервал*[1] *или полуинтервал.*

Доказательство. Пусть $X \subset [0,1]$ — подмножество, не являющееся отрезком, интервалом или полуинтервалом. Тогда в $[0,1] \setminus X$ содержится такая точка α, что в X имеются точка $x > \alpha$ и точка $y < \alpha$. В этом случае X разбивается в объединение двух непустых непересекающихся открытых подмножеств $X \cap [0,\alpha)$ и $X \cap (\alpha, 0]$.

Чтобы доказать, что отрезок, интервал или полуинтервал I связны, возьмем разбиение I в объединение двух непересекающихся открытых подмножеств X и Y, и пусть $x \in X$ — любая точка. Для простоты будем считать, что I — интервал (доказательство для отрезка и полуинтервала аналогично). Пусть I_x — объединение всех интервалов, лежащих в X и содержащих x. Тогда I_x — это интервал

1 Точка и пустое множество считаются частными случаями отрезка и интервала.

$(\alpha, \beta) \subset I$, причем либо α, либо β не является концом интервала I. Пусть, к примеру, α — это не конец интервала I. Тогда α содержится в Y. Поскольку Y открыто, из этого должно следовать, что Y содержит некоторую окрестность точки α, но это невозможно, потому что α является предельной точкой множества X. $\square$

Замечание 12.5. Замыкание $\overline{Z}$ связного подмножества Z всегда связно. Действительно, если $\overline{Z}$ удалось разбить в объединение непустых непересекающихся открытых подмножеств U и V, то $U \cap Z$ и $V \cap Z$ открыты и не пересекаются. Поскольку Z плотно в $\overline{Z}$, эти множества непусты (докажите).

Замечание 12.6. Пусть X связно, а $f: X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда $f(Y)$ связно. Действительно, если $f(Y)$ разбито в объединение непустых непересекающихся открытых подмножеств, то их прообразы — непересекающиеся открытые подмножества в Y.

Следствие 12.7. *Если $f: X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на связном множестве, то $f(X)$ — это отрезок, интервал или полуинтервал. В частности, f принимает все промежуточные значения между $f(x_1)$ и $f(x_2)$.*

Понятие связности изучали многие математики в XIX веке, но математически строгое определение связного множества первым дал Анри Пуанкаре.

Жюль Анри Пуанкаре (Jules Henri Poincaré, 1854—1912)

12.2. Компоненты связности

Замечание 12.8. Пусть X и Y — два пересекающихся связных подмножества топологического пространства M. Тогда $X \cup Y$ тоже связно (докажите это).

Определение 12.9. Пусть $x \in M$ — точка топологического пространства, а A_x — объединение всех связных подмножеств пространства M, содержащих x. В силу вышесказанного A_x связно. Множество A_x называется *компонентой связности* точки x.

Замечание 12.10. Каждое топологическое пространство является непересекающимся объединением своих компонент связности.

Замечание 12.11. Если пространство M представлено в виде объединения непустых непересекающихся открытых подмножеств U и V, то каждая его компонента связности содержится целиком в U или в V (докажите).

Напомним, что непрерывное отображение называется *открытым*, если оно переводит открытые множества в открытые.

Замечание 12.12. Пусть $f\colon X \to Y$ — открытое отображение со связными слоями. Предположим, что X представлено в виде объединения непустых непересекающихся открытых подмножеств U и V. Поскольку слои отображения f связны, подмножества U и V содержат каждый слой целиком. Поэтому $U = f^{-1}(U_1)$, $V = f^{-1}(V_1)$, причем U_1 и V_1 не пересекаются. Поскольку f открыто, U_1 и V_1 открыты и непусты.

Следствие 12.13. *Пусть $f\colon X \to Y$ — открытое отображение со связными слоями и Y связно. Тогда X связно.* □

Замечание 12.14. Из этого следует, что произведение связных пространств X и Y связно. Действительно, отображение проекции $\pi\colon X \times Y \to Y$ открыто (докажите) и имеет связные слои.

Замечание 12.15. Если отображение $f\colon X \to Y$ не открыто, то связность пространства X не вытекает из связности Y и слоев f. В качестве примера рассмотрим естественное отображение из $\mathbb{R}$ с дискретной топологией в $\mathbb{R}$ с обычной топологией. Слои этого отображения — точки, образ связен, но $\mathbb{R}$ с дискретной топологией, очевидно, несвязно.

Замечание 12.16. Компоненты связности топологического пространства замкнуты, потому что замыкание связного множества связно.

Определение 12.17. Топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если все его связные подмножества — точки.

Утверждение 12.18. *Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство, у которого есть база топологии, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Тогда M вполне несвязно.*

Доказательство. Пусть $m \in M$. В силу хаусдорфовости у каждой точки $m_1 \neq m$ есть открыто-замкнутая окрестность, не содержащая m. Поэтому $\{m\}$ — пересечение открыто-замкнутых множеств, $\{m\} = \bigcap U_\alpha$. Любое связное подмножество $Z \subset M$, содержащее m, содержится в каждом из этих открыто-замкнутых множеств целиком (докажите). Поэтому $Z \subset \bigcap U_\alpha = \{m\}$. □

Следствие 12.19. *Пространство p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ вполне несвязно. Действительно, каждый открытый шар в $\mathbb{Z}_p$ замкнут* (докажите это).

Задача 12.1. Все ли открытые подмножества в $\mathbb{Z}_p$ открыто-замкнуты?

Замечание 12.20. Пусть M — топологическое пространство, а $f\colon M \to X$ — произвольное отображение. Рассмотрим на X такую топологию: $U \subset X$ открыто, если $f^{-1}(U)$ открыто. Это сильнейшая топология на X, относительно которой f непрерывно.

Определение 12.21. Пусть M — топологическое пространство, а $\underline{M}$ — множество его компонент связности. Рассмотрим на $\underline{M}$ сильнейшую топологию, в которой естественная проекция $\pi\colon M \to \underline{M}$ непрерывна. Тогда $\underline{M}$ называется *пространством компонент связности M*.

12.3. Линейная связность

Определение 12.22. Пространство M называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x, y \in M$ найдется такое непрерывное отображение $\gamma\colon [0,1] \to M$, что x и y лежат в образе γ.

Замечание 12.23. Из линейной связности следует связность. Действительно, отрезок $[0,1]$ связен, образ связного множества связен, объединение пересекающихся связных множеств связно, и поэтому линейно связное пространство состоит из одной-единственной компоненты связности.

Рассмотрим график Γ_f отображения $f(x) = \sin 1/x$,

$$f\colon (0,1] \to [-1,1].$$

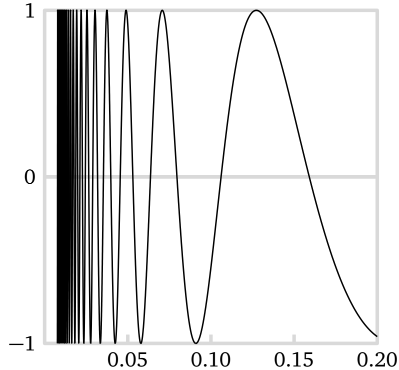


График $f(x) = \sin 1/x$

Это множество незамкнуто; легко видеть, что его замыканием $\overline{\Gamma}_f$ будет объединение Γ_f и отрезка $\{0\} \times [-1, 1]$.

Пространство Γ_f гомеоморфно полуинтервалу $(0, 1]$ (гомеоморфизм задается проекцией на ось абсцисс). Поэтому $\overline{\Gamma}_f$ тоже связно как замыкание связного множества.

Утверждение 12.24. *Построенное таким образом множество $\overline{\Gamma}_f$ не является линейно связным.*

Доказательство. Пусть $\gamma\colon [0, 1] \to \overline{\Gamma}_f$ — отображение из отрезка, образ которого не лежит целиком в $\{0\} \times [-1, 1]$. Докажем, что образ γ не пересекает $\{0\} \times [-1, 1]$. Пусть $U \subset [0, 1]$ — открытое множество, равное $\gamma^{-1}(\Gamma_f)$, U_0 — какая-то компонента связности множества U, $\overline{U}_0$ — ее замыкание, а $Z = \gamma(\overline{U}_0)$. Предположим, что Z пересекает $\{0\} \times [-1, 1]$ (в противном случае $\gamma([0, 1])$ лежит в Γ_f, и мы все доказали).

Шаг 1. Поскольку $\overline{U}_0$ компактно, Z тоже компактно, а следовательно, замкнуто.

Шаг 2. Поскольку замыкание $\gamma(U_0)$ пересекает $\{0\} \times [-1, 1]$, оно не содержится в Γ_f. Следовательно, $\gamma(U_0)$ содержит подмножество вида

$$\left\{\left(\alpha, \sin\frac{1}{\alpha}\right)\colon\ 0 < \alpha < c\right\},$$

и его замыкание Z содержит отрезок $\{0\} \times [-1, 1]$ целиком.

Шаг 3. Так как $Z \setminus \gamma(U_0)$ содержит $\{0\} \times [-1, 1]$, образ $\gamma(\overline{U}_0 \setminus U_0)$ содержит отрезок $\{0\} \times [-1, 1]$. Но это невозможно, потому что множество $\overline{U}_0 \setminus U_0$ конечно. □

Лекция 13

ВПОЛНЕ НЕСВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

13.1. Примеры вполне несвязных пространств

Пусть M — топологическое пространство. Напомним, что M называется *вполне несвязным* (totally disconnected), если любое его подмножество, взятое с индуцированной топологией, несвязно при условии, что оно содержит больше одной точки пространства M.

Напомним также, что подмножество $U \subset M$ называется *открыто-замкнутым* (clopen), если оно одновременно открыто и замкнуто.

Замечание 13.1. Конечное пересечение, конечное объединение и дополнение открыто-замкнутых подмножеств снова открыто-замкнуто.

Замечание 13.2. Пусть в топологическом пространстве M есть предбаза из открыто-замкнутых множеств. Тогда в M есть база из открыто-замкнутых множеств. Действительно, базу можно получить из предбазы взятием конечных пересечений (докажите).

Замечание 13.3. Предположим, что у хаусдорфова топологического пространства M есть база топологии, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Тогда оно вполне несвязно. Действительно, в этом случае у каждого подмножества $Z \subset M$ есть база из открыто-замкнутых множеств. В случае когда Z содержит более одной точки, Z содержит непустое и не совпадающее с Z открыто-замкнутое множество (выведите это из хаусдорфовости пространства M).

Замечание 13.4. Пусть M — топологическое пространство, у которого есть база из открыто-замкнутых множеств. Тогда тихоновское произведение M^I для любого набора индексов I имеет базу из открыто-замкнутых множеств (докажите). Поэтому оно вполне несвязно.

Задача 13.1. Докажите, что произведение вполне несвязных пространств вполне несвязно.

Пример 13.5. Пусть $M = \{0, 1\}$ — множество из двух точек с дискретной топологией (такое множество называется *двоеточием*). Произведение любого числа двоеточий компактно (по теореме Тихонова), хаусдорфово и вполне несвязно.

Замечание 13.6. Предположим, что (M, d) — метрическое пространство, причем метрика $d: M \times M \to \mathbb{R}$ не принимает значений в интервале (α, β), где $\beta > \alpha$. Тогда замкнутый шар $\overline{B}_\alpha(x)$ открыто-замкнут. Действительно, $\overline{B}_\alpha(x) = B_{\alpha+\varepsilon}(x)$, если $\alpha + \varepsilon \in (\alpha, \beta)$, а шар $B_{\alpha+\varepsilon}(x)$ открыт.

Пример 13.7. Из этого немедленно следует, что пространство p-адических целых чисел $\mathbb{Z}_p$ вполне несвязно. Действительно, p-адическая метрика принимает значения в множестве $\{p^s, s \in \mathbb{Z}\}$, и в силу предыдущего замечания любой шар в $\mathbb{Z}_p$ открыто-замкнут (докажите).

Задача 13.2. Докажите, что $\mathbb{Z}_2$ гомеоморфно $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Пример 13.8. Легко видеть, что $\mathbb{Q}$ (множество рациональных чисел с естественной топологией) вполне несвязно (докажите это) и некомпактно.

Задача 13.3. Найдите все компактные подмножества в $\mathbb{Q}$.

13.2. Пространства Стоуна

Определение 13.9. Компактное вполне несвязное хаусдорфово топологическое пространство называется *пространством Стоуна* (Stone space).

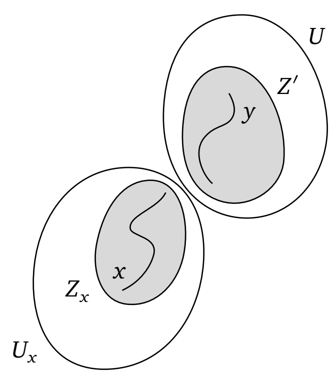
Маршалл Харви Стоун
(Marshall Harvey Stone, 1903—1989)

Лемма 13.10. *Пусть M — пространство Стоуна, а $x, y \in M$ — две разные точки. Тогда у точек x и y есть непересекающиеся открыто-замкнутые окрестности.*

Доказательство. Пусть $Z = \bigcap_\alpha U_\alpha$ — пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств, содержащих x. Если Z не содержит y, то какое-то открыто-замкнутое подмножество $U \ni x$ не содержит y, а тогда его дополнение $M \setminus U$ содержит y, и мы получим, что у x и y есть непересекающиеся открыто-замкнутые окрестности. Поэтому достаточно доказать, что $Z = \{x\}$.

Шаг 1. Предположим, что $Z \neq \{x\}$. Поскольку Z — пересечение замкнутых подмножеств пространства M, оно замкнуто. Поскольку Z несвязно, Z есть объединение непересекающихся подмножеств[1] замкнутых в Z, $Z = Z_x \sqcup Z'$, где Z_x содержит x, а Z' не содержит x. Но коль скоро Z замкнуто, Z_x, Z' замкнуты в M (проверьте это).

Шаг 2. Поскольку M компактно и хаусдорфово, оно нормально, т. е. любые два замкнутых непересекающихся подмножества M имеют непересекающиеся окрестности (см. лекцию 8). Применив это к Z_x и Z', получим непересекающиеся окрестности $U_x \supset Z_x$, $U' \supset Z'$.



Непересекающиеся окрестности Z_x, Z'

Шаг 3. Обозначим через K дополнение $M \setminus (U_x \cup U')$. Поскольку $Z = \bigcap_\alpha U_\alpha$, имеем

$$K \subset \bigcup_\alpha (M \setminus U_\alpha).$$

1 Обозначение $X = Y \sqcup Z$ используется, чтобы указать, что X есть объединение непересекающихся множеств Y и Z.

Поскольку K замкнуто, а M компактно, K тоже компактно. Поэтому открытое покрытие $K \subset \bigcup_\alpha (M \setminus U_\alpha)$ имеет конечное подпокрытие:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (M \setminus U_i),$$

где все U_i открыто-замкнуты и содержат Z. Из этого следует, что $U := \bigcup_{i=1}^n U_i$ открыто-замкнуто, содержит x и содержится в $M \setminus K = U_x \cup U'$.

Шаг 4. Имеем $U = (U \cap U_x) \sqcup (U \cap U')$. Поскольку U_x, U' открыты, $U \cap U_x$ открыто и замкнуто в U. Следовательно, $V = U \cap U_x$ открыто и замкнуто в M. Это множество не пересекается с Z' и содержит x по построению. Значит, пересечение всех открыто-замкнутых окрестностей x не пересекается с Z'. Мы пришли к противоречию и доказали, что $Z = \{x\}$. Лемма 13.10 доказана. □

Из этой леммы немедленно следует

Теорема 13.11. *Пусть M — пространство Стоуна. Тогда у M есть база топологии, состоящая из открыто-замкнутых подмножеств.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{T}$ — топология на M, а $\mathscr{T}_1$ — топология, полученная из базы, состоящей из всех открыто-замкнутых подмножеств M. Естественное отображение

$$\mathrm{Id}\colon (M, \mathscr{T}) \to (M, \mathscr{T}_1)$$

биективно и непрерывно (проверьте). В силу леммы 13.10 пространство $(M, \mathscr{T}_1)$ хаусдорфово (докажите это). Непрерывная биекция из компактного пространства в хаусдорфово является гомеоморфизмом, следовательно, топология $\mathscr{T}$ совпадает с $\mathscr{T}_1$. □

Замечание 13.12. Из леммы 13.10 немедленно вытекает, что для любой пары точек $x, y \in M$ существует непрерывная функция

$$f\colon M \to \{0, 1\},$$

принимающая значение 1 в точке x и 0 в точке y.

Пусть $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ — кольцо непрерывных функций на M со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Рассмотрим отображение

$$M \xrightarrow{\Psi} \{0, 1\}^R,$$

переводящее m в $\prod_{\varphi \in R} \varphi(m)$. Оно непрерывно, что следует из определения тихоновской топологии (проверьте это). Из замечания

13.12 следует, что Ψ инъективно; поскольку M компактно, из этого вытекает, что Ψ — это гомеоморфизм на его образ. Мы получили следующую теорему.

Теорема 13.13. *Пусть M — пространство Стоуна. Тогда M гомеоморфно замкнутому подмножеству в тихоновском произведении $\{0, 1\}^I$ для какого-то набора индексов I.*

Лекция 14

ТЕОРЕМА СТОУНА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ БУЛЕВЫХ КОЛЕЦ И ТЕОРИЯ КАТЕГОРИЙ

14.1. Категории

Определение 14.1. *Категорией* $\mathscr{C}$ называется набор данных («объектов категории», «морфизмов между объектами» и так далее), удовлетворяющих аксиомам, приведенным ниже.

Данные:

Объекты. Множество $\mathscr{O}b(\mathscr{C})$ объектов категории $\mathscr{C}$ (иногда рассматривают не множество, а *класс* $\mathscr{O}b(\mathscr{C})$, который может и не быть множеством, например, класс всех множеств или класс всех линейных пространств).

Морфизмы. Для любых $X, Y \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ задано множество $\mathscr{M}or(X, Y)$ *морфизмов* из X в Y.

Композиция морфизмов. Если $\varphi \in \mathscr{M}or(X, Y)$, $\psi \in \mathscr{M}or(Y, Z)$, то задан морфизм $\varphi \circ \psi \in \mathscr{M}or(X, Z)$, который называется *композицией морфизмов*.

Тождественный морфизм. Для каждого $A \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ задан морфизм $\mathrm{Id}_A \in \mathscr{M}or(A, A)$.

Эти данные удовлетворяют следующим аксиомам.

Ассоциативность композиции: $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3$.

Свойства тождественного морфизма: для любого морфизма $\varphi \in \mathscr{M}or(X, Y)$ выполняется равенство $\mathrm{Id}_X \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_Y$.

Практически любая математическая структура является категорией. Например, категория множеств (морфизмы — произвольные отображения), категория линейных пространств (морфизмы — линейные отображения), категории колец, полей, групп (морфизмы — гомоморфизмы), категория топологических пространств (морфизмы — непрерывные отображения) и так далее.

Категории сами образуют категорию; морфизмами этой категории являются *функторы*.

Определение 14.2. Пусть $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ — категории. *Ковариантным функтором* из $\mathscr{C}_1$ в $\mathscr{C}_2$ называется следующий набор данных.

1. Отображение $F\colon \mathscr{O}b(\mathscr{C}_1) \to \mathscr{O}b(\mathscr{C}_2)$, ставящее в соответствие объектам $\mathscr{C}_1$ объекты $\mathscr{C}_2$.

2. Отображение морфизмов $F\colon \mathscr{M}or(X,Y) \to \mathscr{M}or(F(X),F(Y))$, определенное для любой пары объектов $X, Y \in \mathscr{O}b(\mathscr{C}_1)$.

Эти даные *определяют функтор из $\mathscr{C}_1$ в $\mathscr{C}_2$*, если $F(\varphi)\circ F(\psi) = F(\varphi\circ\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in \mathscr{M}or(X,Y)$ и $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ для любого X.

Легко видеть, что композиция функторов — тоже функтор.

Пример 14.3. Любая «естественная операция» на математических объектах — это функтор. Например, отображение $X \to 2^X$ на категории множеств, или отображение $M \to M^I$ на топологических пространствах для заданного набора индексов I, или отображение $V \to V \oplus V$ на линейных пространствах. Другим примером функтора является *тождественный функтор* из категории в себя. Еще один пример функтора — отображение, ставящее в соответствие топологическому пространству его пространство связных компонент.

Определение 14.4. Если задана категория $\mathscr{C}$, то можно определить *двойственную категорию* (opposite category) $\mathscr{C}^{op}$. Множество объектов в $\mathscr{C}^{op}$ то же самое, что и в $\mathscr{C}$, а $\mathscr{M}or_{\mathscr{C}^{op}}(A,B) = \mathscr{M}or_{\mathscr{C}}(B,A)$. Композиции $\varphi\circ\psi$ в $\mathscr{C}$ соответствует композиция $\psi^{op}\circ\varphi^{op}$ в $\mathscr{C}^{op}$. Проверьте, что это категория.

Определение 14.5. *Контравариантный функтор из $\mathscr{C}_1$ в $\mathscr{C}_2$* — это функтор из $\mathscr{C}_1^{op}$ в $\mathscr{C}_2$.

Пример 14.6. Примером контравариантного функтора является отображение, ставящее векторному пространству V в соответствие двойственное пространство V^*. Другим примером контравариантного функтора является отображение из топологических пространств в кольца, ставящее в соответствие топологическому пространству M кольцо непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на M (проверьте, что это функтор).

Определение 14.7. Пусть $X, Y \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ — объекты категории $\mathscr{C}$. Морфизм $\varphi \in \mathscr{M}or(X,Y)$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $\psi \in \mathscr{M}or(Y,X)$, что $\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}_X$ и $\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}_Y$. В таком случае объекты X и Y называются *изоморфными*.

Замечание 14.8. Пусть $X \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ — объект категории $\mathscr{C}$. Тогда отображение $Y \to \mathscr{M}or(X,Y)$ задает ковариантный функтор из $\mathscr{C}$

в категорию Set множеств (проверьте это), а отображение $Y \to \to \mathcal{M}or(Y, X)$ задает контравариантный функтор из $\mathscr{C}$ в Set (проверьте). Такие функторы называются *представимыми*.

Определение 14.9. Два функтора $F, G\colon \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ называются *изоморфными*, если для каждого $X \in \mathcal{O}b(\mathscr{C}_1)$ задан изоморфизм $\Psi_X : F(X) \to G(X)$, причем для любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}or(X, Y)$ выполняется равенство

$$F(\varphi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\varphi). \tag{14.1.1}$$

Замечание 14.10. Подобные коммутационные отношения принято изображать *коммутативными диаграммами*. Так, к примеру, соотношение (14.1.1) можно записать следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\Psi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\Psi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(Y). \end{tikzcd} \tag{14.1.2}$$

Задача 14.1. Пусть $F\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ — функтор из категории $\mathscr{C}$ в категорию множеств. Предположим, что F *представим*, т. е. изоморфен функтору $Y \to \mathcal{M}or(X, Y)$. Докажите, что тогда объект X определен однозначно с точностью до изоморфизма.

Определение 14.11. Функтор $F\colon \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ называется *эквивалентностью категорий*, если найдутся такие функторы $G, G'\colon \mathscr{C}_2 \to \to \mathscr{C}_1$, что $F \circ G$ изоморфен тождественному функтору на $\mathscr{C}_1$, а $G' \circ F$ изоморфен тождественному функтору на $\mathscr{C}_2$.

Замечание 14.12. Можно проверить, что это равносильно следующему: F задает биекцию на классах изоморфизма объектов и биекцию $\mathcal{M}or(X, Y) \to \mathcal{M}or(F(X), F(Y))$.

С точки зрения теории категорий эквивалентные категории неразличимы.

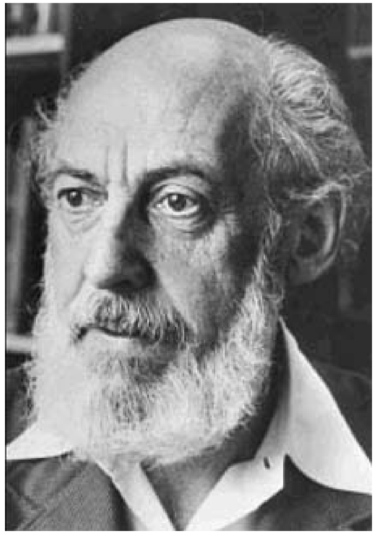
14.2. Теория категорий: история, замечания

Категории были изобретены топологами Самуэлем Эйленбергом и Сондерсом Маклейном в 1942—45 годах для употребления в топологии. Эйленберг и Маклейн заметили, что алгебраические инварианты топологических пространств (такие как фундаменталь-

Сондерс Маклейн (Saunders Mac Lane, 1909—2005)

ная группа) являются функторами. Также функторами являются различные естественные конструкции в топологии, например «пространство петель», сопоставляющее пространству M пространство отображений $C(S^1, M)$ (см. лекцию 11). Эйленберг и Маклейн обнаружили, что алгебраическую топологию гораздо проще изучать, если абстрагироваться от геометрической стороны дела. Несмотря на кажущуюся абстрактность, условие функториальности того или иного отображения во многих случаях достаточно для доказательства единственности и для его явного вычисления, и дополнительные геометрические детали только затрудняют работу.

Основным алгебраическим инвариантом топологического пространства является *группа когомологий*; к середине 1940-х гг. топологи знали с десяток разных геометрических определений когомологий, но работать с ними было неудобно, потому что эквивалентность доказывать не умели. Эйленберг и Маклейн, а в 1950-е гг. — Эйленберг и Стинрод определили когомологии в терминах категорий таким образом, что проверить различные свойства когомологий оказалось очень просто.



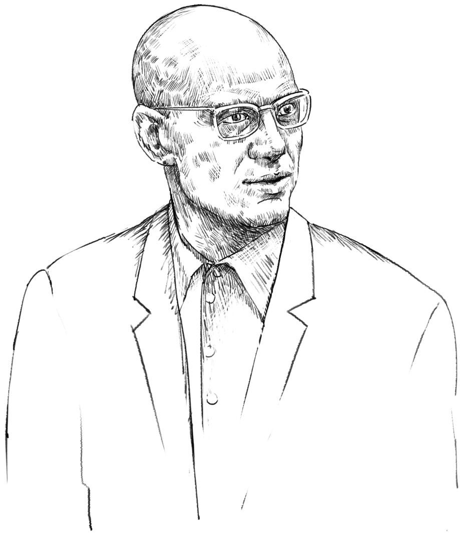
Самуэль Эйленберг (Samuel Eilenberg, 1913—1998)

В конце 1950-х теория категорий легла в основу алгебраической геометрии, разработанной А. Гротендиком и изложеннй в книге «Éléments de géométrie algébrique» и других книгах; эта теория стала основным языком современной математики, без которого не обходится ни одна область, развившаяся после 1960-х гг.

В терминах категорий можно определить довольно много математических конструкций, не прибегая к «множествам» и их «элементам». Например, произведение объектов A и B категории $\mathscr{C}$ можно определить как такой объект $A \times B$, что функтор $X \to \mathscr{M}or(X, A \times B)$ из $\mathscr{C}$ в категорию множеств изоморфен функтору $X \to \mathscr{M}or(X, A) \times \mathscr{M}or(X, B)$.

Многие математики предлагают отказаться от теории множеств в изложении основ математики и использовать вместо нее аксиоматическую теорию категорий.[1] Впрочем, сама теория категорий не свободна от теоретико-множественных трудностей, которые связаны с тем, что $\mathscr{O}b(\mathscr{C})$ для большинства категорий (для категории множеств, например) — не множество, а класс.

1 Первым тут был, видимо, Ловир (F. W. Lawvere), предложивший категории в качестве фундамента математики в своей диссертации в 1963 г.; с тех пор эту точку зрения разнообразно развивали и логики, и специалисты по категориям.



Александр Гротендик
(Alexander Grothendieck, 1928—2014)

Следуя Гротендику и Вердье, теоретико-множественные трудности в определении категории обыкновенно обходят следующим способом. *Малой категорией* называется такая категория, у которой $\mathscr{O}b(\mathscr{C})$ и $\mathscr{M}or(X, Y)$ — множества. Вместо категории «всех» (множеств, пространств, колец и так далее) рассматривают категорию множеств, пространств, колец и так далее с мощностью, ограниченной некоторым (раз и навсегда выбранным) кардиналом, который называется *универсумом Гротендика* и определяется аксиоматически. Пользуясь аксиомами универсума, легко видеть, что каждая категория с объектами малой мощности эквивалентна малой категории.

К сожалению, существование универсума равносильно существованию *сильно недостижимых кардиналов* в теории множеств. Подобная аксиома независима от аксиом ZFC (Цермело—Френкеля плюс аксиома выбора). Из существования сильно недостижимых кардиналов можно вывести непротиворечивость ZFC в рамках самой ZFC, поэтому непротиворечивость аксиомы универсума строго сильнее, чем непротиворечивость ZFC.

14.3. Булевы кольца и булевы алгебры

Определение 14.13. *Идемпотент* в кольце — элемент, удовлетворяющий соотношению $x^2=x$. *Булево кольцо* — кольцо (коммутативное, с единицей), в котором любой элемент является идемпотентом.

Замечание 14.14. Отметим, что в булевом кольце выполнено соотношение $2x=0$ для любого x. Действительно,

$$0 = (x+1)^2-x-1 = (x^2-x)+2x = 2x.$$

Булевы кольца чрезвычайно важны в логике и информатике, ибо категория булевых колец эквивалентна категории булевых алгебр, т. е. алгебр логических высказываний.

Определение 14.15. Пусть A — множество, наделенное бинарными операциями $\wedge$ (коньюнкция, «и»), $\vee$ (дизъюнкция, «или»), и $\neg$ (отрицание, «не»), и в нем выделены элементы 1 («истина») и 0 («ложь»). Множество A называется *булевой алгеброй*, если выполнены следующие условия:

ассоциативность: $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$, $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$;
коммутативность: $a\wedge b=b\wedge a$, $a\vee b=b\vee a$;
дистрибутивность: $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$, $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge\wedge(a\vee c)$;
абсорбция: $a\vee(a\wedge b)=a$, $a\wedge(a\vee b)=a$;
дополнительность: $a\vee\neg a=1$, $a\wedge\neg a=0$;
$a\vee 0=a$ и $a\wedge 1=a$ для всех a.

Замечание 14.16. Этим условиям, очевидно, удовлетворяет любой набор логических утверждений, которые могут принимать значения «истинно» и «ложно». Логические операции («и», «или», «не») превращают такой набор утверждений в булеву алгебру.

Замечание 14.17. Пусть A — булева алгебра. Зададим на A умножение и сложение следующим образом: $a\cdot b:=a\wedge b$, $a+b:=(a\vee b)\wedge\neg(a\wedge b)$ (сумма соответствует «симметрической разности», или, что то же самое, «исключающему или»). Полученные операции удовлетворяют аксиомам кольца (проверьте). Ноль и единица играют роль 0 и 1, а соотношение $a^2=a$ следует из аксиомы дополнительности $a+\neg a=1$, из которой (после домножения на a) получаем, что

$$a\wedge a+a\wedge\neg a = a;$$

применив соотношение $a \wedge \neg a = 0$ (дополнительность), приходим к равенству $a^2 = a$. Мы получили функтор F из категории булевых алгебр в категорию булевых колец.

Теорема 14.18. *Этот функтор — эквивалентность категорий.*

Доказательство. Чтобы доказать, что $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}_1$ — эквивалентность, надо построить обратный функтор G, т. е. из каждого булева кольца произвести булеву алгебру. Делается это весьма просто: если A — булево кольцо, то операции $\neg, \wedge, \vee$ определяются формулами $\neg a = 1 - a$, $a \wedge b = ab$, $a \vee b = ab + a + b$. Аксиомы булевой алгебры проверяются непосредственно (проверьте их), а взаимная обратность F и G очевидна из конструкции. □

Пример 14.19. Пусть M — любое топологическое пространство, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ — кольцо непрерывных функций на M со значениями в поле $\mathbb{F}_2$ из двух элементов. Тогда R — булево кольцо. Оно называется *кольцом открыто-замкнутых подмножеств M*, а соответствующая булева алгебра — *алгеброй открыто-замкнутых подмножеств*.

Следующая простая лемма известна из лекции 9 (см. замечание 9.20).

Лемма 14.20. *Пусть R — булево кольцо, а $I \subset R$ — максимальный идеал в R. Тогда $R/I \cong \mathbb{F}_2$.*

Доказательство полностью аналогично замечанию 9.20: воспользуйтесь тождеством $x^2 = x$. □

Замечание 14.21. Похожее рассуждение доказывает, что каждый простой идеал в булевом кольце максимальный. Действительно, пусть $I \subset R$ — простой идеал. Тогда R/I — кольцо без делителей нуля, все элементы которого — идемпотенты. Для любого $x \in R/I$ имеем $x(1-x) = 0$, значит, или x, или $1-x$ равны 0.

14.4. Спектр Зарисского для булева кольца

Определение 14.22. Пусть R — булево кольцо, а $\operatorname{Spec}(R)$ — множество максимальных (или простых; в силу замечания 14.21 все простые идеалы в R максимальны) идеалов в R, снабженное *топологией Зарисского*. Напомним, что база открытых множеств в топологии Зарисского состоит из множеств

$$A_f := \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(R)\colon\ f \notin \mathfrak{m}\},$$

где $f \in R$ — какой-то элемент кольца R. Пространство $\operatorname{Spec}(R)$ называется *спектром*, или *пространством Зарисского* кольца R.

Замечание 14.23. Для любого $f \in R$ имеем $\operatorname{Spec}(R) = A_f \sqcup A_{1-f}$. Действительно, условие $f \notin \mathfrak{m}$ равносильно тому, что $(1-f) \in \mathfrak{m}$, так как $R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$.

Замечание 14.24. Из этого немедленно вытекает, что все множества A_f открыто-замкнуты и, значит, $\operatorname{Spec}(R)$ вполне несвязно (докажите).

Замечание 14.25. Если $x \neq y \in \operatorname{Spec}(R)$ — максимальные идеалы, то найдется $f \in x$, $f \notin y$. В этом случае A_f, A_{1-f} — непересекающиеся окрестности точек x и y. Мы получили, что $\operatorname{Spec}(R)$ хаусдорфово.

Лемма 14.26. *Пусть R — кольцо, а $\operatorname{Spec}(R)$ — его пространство Зарисского. Тогда $\operatorname{Spec}(R)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $M = \bigcup_\alpha A_{f_\alpha}$ — покрытие пространства $M = \operatorname{Spec}(R)$. Для доказательства леммы достаточно убедиться, что в $\bigcup_\alpha A_{f_\alpha}$ найдется конечное подпокрытие (проверьте). Обозначим $V_f := M \setminus A_f$. Это множество состоит из всех идеалов, содержащих f. Пусть I — идеал, порожденный всеми f_α. Очевидно,

$$M = \bigcup_\alpha A_{f_\alpha} \iff \varnothing = \bigcap_\alpha V_{f_\alpha}.$$

Поэтому никакой максимальный идеал не содержит всех f_α. Значит, I не содержится в максимальном идеале, и поэтому $1 \in I$. Из этого следует, что 1 выражается в виде линейной комбинации конечного числа элементов f_α:

$$1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \qquad \lambda_i \in R.$$

Мы получаем, что

$$\varnothing = \bigcap_{i=1}^n V_{f_i},$$

а поэтому $M = \bigcup_{i=1}^n A_{f_i}$. Мы доказали, что $M = \operatorname{Spec}(R)$ компактно. □

Замечание 14.27. Мы доказали, что $\operatorname{Spec}(R)$ для любого булева кольца — хаусдорфово компактное вполне несвязное топологическое пространство. Оно называется *пространством Стоуна булева кольца*.

Замечание 14.28. Соответствие

$$R \to \mathrm{Spec}(R)$$

задает контравариантный функтор из категории булевых колец в категорию пространств Стоуна[1] (докажите это).

Оказывается, каждое пространство Стоуна M можно получить таким образом. Из утверждения 14.32, доказанного ниже, следует, что M гомеоморфно спектру кольца $C(M, \mathbb{F}_2)$ непрерывных функций на M со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Лемма 14.29. *Пусть M — пространство Стоуна, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$. Пусть $\mathfrak{m} \subsetneq R$ — некоторый идеал. Тогда все функции $f \in \mathfrak{m}$ имеют общий нуль в M (точку, где все эти функции равны нулю).*

Доказательство. *Шаг 1.* Если у $\mathfrak{m}$ нет общего нуля, то

$$M = \bigcup_{f \in \mathfrak{m}} f^{-1}(1).$$

Мы получили открытое покрытие M. Поскольку M компактно, из него можно выбрать конечное подпокрытие. Поэтому имеется такой конечный набор $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{m}$, что $M = \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(1)$.

Шаг 2. Каждый элемент $f \in R$ имеет вид χ_U, где $U = f^{-1}(1)$, а χ_U — характеристическая функция U. Поэтому имеется такой набор открытых множеств U_i, $\chi_{U_i} \in \mathfrak{m}$, что $M = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Шаг 3. Имеем $\chi_{U \cup V} = \chi_U + \chi_V + \chi_U \chi_V$. Пусть теперь $W = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Воспользовавшись индукцией, получим, что $\chi_W = P(\chi_{U_1}, \chi_{U_2}, \ldots)$, где P — полином без свободного члена.

Шаг 4. Мы получили, что $1 = \chi_M = P(\chi_{U_1}, \chi_{U_2}, \ldots) = P(f_1, f_2, \ldots)$. Поэтому 1 лежит в идеале $\mathfrak{m}$. Противоречие! Значит, у $\mathfrak{m}$ есть общий нуль. □

Лемма 14.30. *Пусть M — пространство Стоуна, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ — кольцо непрерывных функций на M со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Пусть $\mathfrak{m} \subset R$ — максимальный идеал. Тогда у функций $f \in \mathfrak{m}$ есть единственный общий нуль (точка, где они все равны нулю).*

Доказательство. Существование общего нуля следует из леммы 14.29. Пусть есть две несовпадающие точки $x_1 \neq x_2 \in M$ с тем свойством, что все $f \in \mathfrak{m}$ равны нулю в этих точках. Поскольку

[1] Напомним, что пространства Стоуна — хаусдорфовы компактные вполне несвязные топологические пространства.

непрерывные функции на M разделяют точки, гомоморфизм

$$\psi\colon R \to \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2, \quad \psi(f) = (f(x_1), f(x_2)),$$

сюръективен (докажите). С другой стороны, $\psi(\mathfrak{m}) = 0$, поскольку все элементы идеала $\mathfrak{m}$ равны нулю в точках x_1, x_2. Это дает сюръективный гомоморфизм $\psi\colon R/\mathfrak{m} \to \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. Но поскольку $R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$, это невозможно. Противоречие! Мы доказали единственность общего нуля максимального идеала. □

Замечание 14.31. Из леммы 14.30 получаем биекцию $\mathrm{Spec}(R) \to M$, где $R = C(M, \mathbb{F}_2)$. Докажем, что эта биекция — гомеоморфизм. База топологии на M задается открыто-замкнутыми множествами, т. е. множествами вида

$$A_f = \{x \in M\colon\ f(x) = 1\}.$$

Те же самые множества A_f задают базу открытых подмножеств в $\mathrm{Spec}(R)$.

Мы доказали такое утверждение.

Утверждение 14.32. *Пусть M — пространство Стоуна, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ — кольцо непрерывных функций на M со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Тогда M гомеоморфно* $\mathrm{Spec}(R)$. □

Замечание 14.33. Аналогичное, но более простое рассуждение доказывает, что кольцо непрерывных $\mathbb{F}_2$-значных функций на $\mathrm{Spec}(R)$ изоморфно R. Действительно, отображение $(f, \mathfrak{m}) \to f/\mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$ задает гомоморфизм колец $\Psi\colon R \to C(\mathrm{Spec}(R), \mathbb{F}_2)$. Поскольку каждая непрерывная функция содержится в идеале, Ψ — это вложение (докажите). Непрерывные функции на $\mathrm{Spec}(R)$ порождены характеристическими функциями открытых подмножеств A_f (докажите), а все такие функции получаются из R по формуле

$$\chi_{A_f} = \Psi(f).$$

Получается, что функторы $M \to C(M, \mathbb{F}_2)$ и $R \to \mathrm{Spec}(R)$ взаимно обратны. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 14.34 (теорема Стоуна о представимости булевых алгебр)**.** *Функтор $R \to \mathrm{Spec}(R)$ задает эквивалентность между категорией булевых колец и двойственной категорией к категории хаусдорфовых компактных вполне несвязных топологических пространств.* □

Замечание 14.35. Категории булевых алгебр и булевых колец тоже эквивалентны (теорема 14.18).

14.5. Булевы алгебры: история, замечания

Законы логики, которые лежат в основе определения булевой алгебры, сформулированы английскими математиками Джорджем Булем (George Boole) в 1847 г. и Августом де Морганом (August de Morgan) в 1860 г. Аксиоматическое определение булевых алгебр принадлежит Хантингтону (Edward Vermilye Huntington, 1904), но серьезно изучать булевы алгебры стали только после фундаментальных работ Маршалла Стоуна (1930-е гг.). В 1960-е годы булевы алгебры нашли широкое применение в логике, где с их помощью доказывается невыводимость разных теоретико-множественных гипотез, таких как аксиома выбора и континуум-гипотеза.

Теорема Маршалла Стоуна буквального обобщения на более общие (не булевы) кольца не имеет. Но в основании алгебраической геометрии лежит весьма похожая идея, принадлежащая Гротендику, которая позволяет интерпретировать алгебраические объекты (кольца) как геометрические (пространства Зарисского) и наоборот.

Лекция 15

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

15.1. Гомотопные отображения

Определение 15.1. Пусть $f_0, f_1\colon X \to Y$ — непрерывные отображения. *Гомотопией* f_0 в f_1 называется такое непрерывное отображение $f\colon X \times [0, 1] \to Y$, что $f|_{X\times\{0\}} = f_0$, $f|_{X\times\{1\}} = f_1$.

Замечание 15.2. В определении, приведенном выше, фиксирован отрезок $[0, 1]$; довольно часто удобнее определять гомотопию между отображениями f_a и f_b, где a, b — произвольные вещественные числа. В этом случае гомотопия будет непрерывным отображением $X \times [a, b] \to Y$.

Замечание 15.3. Гомотопные отображения — отображения, которые можно непрерывно продеформировать одно в другое. Иногда говорят «гомотопия f_0 в f_1», а иногда «гомотопия f_0 к f_1»; эти выражения эквивалентны.

Замечание 15.4. Пусть f_0, f_1 принадлежат какому-то выделенному классу отображений, например классу C-липшицевых отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Говорится, что $f\colon X \times [0, 1] \to Y$ — *гомотопия в классе* $\mathscr{A}$, если для любого t отображение $f_t := f|_{X\times\{t\}}\colon X \to Y$ принадлежит классу $\mathscr{A}$.

Задача 15.1. Пусть $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции. Докажите, что f и g гомотопны в классе гладких отображений.

Следующее утверждение вполне очевидно.

Утверждение 15.5. *Пусть $f_0, f_1\colon X \to Y$ — гомотопные отображения, а $g\colon P \to X$, $h\colon Y \to Z$ — непрерывные отображения. Тогда $f_0 \circ h$ гомотопно $f_1 \circ h$, а $g \circ f_0$ гомотопно $g \circ f_1$.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \times [0, 1] \to Y$ — гомотопия f_0 в f_1. Гомотопию $f_0 \circ h$ в $f_1 \circ h$ строим как композицию $f \circ h\colon X \times [0, 1] \to Z$ (проверьте, что это гомотопия). Гомотопию $g \circ f_0$ в $g \circ f_1$ получим, взяв композицию $g \times \mathrm{Id}_{[0,1]}\colon P \times [0, 1] \to X \times [0, 1]$ и $f\colon X \times [0, 1] \to Y$. □

Следующее утверждение также тривиально, но весьма полезно.

Утверждение 15.6. *Пусть $f_0, f_1, f_2\colon X \to Y$ — непрерывные отображения, причем f_0 гомотопно f_1, а f_1 гомотопно f_2. Тогда f_0 гомотопно f_2.*

Доказательство. Пусть $\tilde{f}\colon X\times[0,1]\to Y$ — гомотопия f_0 в f_1, а $\tilde{\tilde{f}}\colon X\times[1,2]\to Y$ — гомотопия f_1 в f_2. Рассмотрим отображение $f\colon X\times[0,1]\to Y$,

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\tilde{f}(2\lambda), & \text{если } \lambda\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \tilde{\tilde{f}}(2\lambda), & \text{если } \lambda\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}\tag{15.1.1}$$

Если отображение f непрерывно, то оно, очевидно, является гомотопией f_0 в f_2, поэтому для доказательства утверждения 15.6 достаточно убедиться, что f непрерывно.

Легко убедиться, что отображение $\varphi\colon A\to B$ непрерывно, если для каждого $Z\subset A$ образ $\varphi(\overline{Z})$ замыкания Z лежит в замыкании $\overline{\varphi(Z)}$ (проверьте это).

Пусть $Z\subset X\times[0,1]$ — некоторое подмножество, причем

$$Z_1=Z\cap X\times[0,1/2]\quad\text{и}\quad Z_2=Z\cap X\times[1/2,1].$$

Легко видеть, что $\overline{Z}=\overline{Z}_1\cup\overline{Z}_2$ и соответственно

$$f(\overline{Z})\subset f(\overline{Z}_1)\cup f(\overline{Z}_2)\subset\overline{f(Z_1)}\cup\overline{f(Z_2)}$$

(последнее включение следует из того, что ограничения $f|_{X\times[0,1/2]}$ и $f|_{X\times[1/2,1]}$ непрерывны). Поэтому f непрерывно. Утверждение 15.6 доказано. □

Замечание 15.7. Предыдущее утверждение означает, что гомотопии можно «склеивать» между собой: приклеив гомотопию f_0 в f_1 к гомотопии f_1 в f_2, мы получим гомотопию f_0 в f_2. Первое отображение непрерывно деформируется во второе, второе в третье, и, взяв эти две деформации одну за другой, мы получаем, что первое можно непрерывно продеформировать в третье.

Замечание 15.8. Из утверждения 15.6 следует, что отношение «f гомотопно g» транзитивно. Оно также рефлексивно и симметрично (проверьте). Множество классов эквивалентности отображений $f\colon X\to Y$ с точностью до гомотопии называется *множеством классов гомотопической эквивалентности отображений* или же *множеством гомотопических классов отображений*.

Задача 15.2. Пусть $\mathscr{O}b(\mathscr{C})$ — класс всех топологических пространств, а $\mathscr{M}or(X,Y)$ — множество гомотопических классов непрерывных отображений из X в Y. Докажите, что таким образом получается категория. Эта категория называется *гомотопической категорией*, а изоморфизмы в ней — *гомотопическими эквивалетностями*.

В дальнейшем нам понадобится следующая тривиальная лемма.

Лемма 15.9. *Пусть f_0, f_1 — непрерывные отображения из отрезка $[a, b]$ в отрезок $[c, d]$, причем $f_i(a) = a'$, $f_i(b) = b'$. Тогда f_0 гомотопно f_1 в классе отображений, переводящих a в a', b в b'.*

Следующее отображение осуществляет искомую гомотопию:

$$f\colon [a, b] \times [0, 1] \to [c, d], \quad f(x, t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x)$$

(проверьте это).

15.2. Категория пространств с отмеченной точкой и пространства петель

Определение 15.10. Пара

$$(\text{топологическое пространство } M, \text{ точка } m \in M)$$

называется *пространством с отмеченной точкой* (pointed space) и обозначается (M, m). Пространство с отмеченной точкой еще называют *пунктированным*, или *отмеченным* пространством.

Определение 15.11. *Непрерывное отображение пунктированных пространств* $\varphi\colon (X, x) \to (Y, y)$ — непрерывное отображение из X в Y, которое переводит x в y. Во избежание путаницы непрерывные отображения пунктированных пространств называются *морфизмами пунктированных пространств*.

Напомним, что в предыдущей лекции было дано определение категории.

Замечание 15.12. Легко видеть, что *пространства с отмеченной точкой образуют категорию*: композиция морфизмов — снова морфизм; композиция, очевидно, ассоциативна, а тождественное отображение

$$\mathrm{Id}_{(X,x)}\colon (X, x) \to (X, x)$$

является морфизмом пунктированных пространств.

Определение 15.13. Пусть $f_0, f_1\colon (X, x) \to (Y, y)$ — морфизмы пунктированных пространств. *Гомотопией морфизма f_0 к f_1* называется такая гомотопия $f\colon X \times [0, 1] \to Y$, что $f(x, t) = y$ для любого $t \in [0, 1]$.

Определение 15.14. Пусть M — топологическое пространство. Напомним, что *путем из точки* $x \in M$ *в точку* $y \in M$ называется непрерывное отображение $\gamma\colon [a, b] \to M$ из отрезка $[a, b]$ в M, для которого $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Определение 15.15. Пусть (M, m) — топологическое пространство с отмеченной точкой. Рассмотрим множество путей $\gamma\colon [0, 1] \to M$ из m в m. Такие пути называются *петлями в* M. Множество всех петель обозначается $\Omega(M, m)$.

Если M — метрическое пространство, то на $\Omega(M, m)$ вводится sup-метрика, заданная формулой

$$d(\gamma, \gamma') = \sup_{t \in [0,1]} d(\gamma(t), \gamma'(t)).$$

Пространство $\Omega(M, m)$ называется *пространством петель* для M. Если M метризуемо и локально компактно, то топология на $\Omega(M, m)$ не зависит от выбора метрики на M (см. лекцию 11). В такой ситуации мы рассматриваем пространство петель $\Omega(M, m)$ как топологическое пространство.

Замечание 15.16. Рассмотрим окружность S^1 с отмеченной точкой. Легко видеть, что любой путь $\gamma\colon [0, 1] \to M$ из m в m задает морфизм $(S^1, 0) \to (M, m)$ и это соответствие взаимно однозначно. В дальнейшем мы будем рассматривать $\Omega(M, m)$ как множество морфизмов отмеченных пространств $(S^1, 0) \to (M, m)$.

Замечание 15.17. Терминология теории категорий в применении к пространствам с отмеченной точкой может показаться избыточной. Это не так: язык теории категорий существенно экономит время и позволяет избежать двусмысленностей. Если вы испытываете дискомфорт от теоретико-категорного языка, всякий раз заменяйте «морфизм отмеченных пространств» на «непрерывное отображение, переводящее отмеченную точку в отмеченную точку», и постижение топологии будет менее болезненным.

15.3. Фундаментальная группа

Пусть (M, m) — пунктированное топологическое пространство. В силу утверждения 15.6 гомотопия задает отношение эквивалентности на множестве всех морфизмов $(S^1, 0) \to (M, m)$, или, что то же самое, путей из m в m. Множество классов гомотопической эквивалентности путей из m в m обозначается $\pi_1(M, m)$.

Пусть $\gamma, \gamma'\colon [0,1] \to M$ — два пути из m в m. Обозначим через $\widetilde{\gamma\gamma'}\colon [0,2] \to M$ путь, который получен по формуле

$$\widetilde{\gamma\gamma'}(\lambda) = \begin{cases} \gamma(\lambda), & \text{если } \lambda \leqslant 1, \\ \gamma'(\lambda-1), & \text{если } \lambda \geqslant 1. \end{cases}$$

Непрерывность этого пути доказывается тем же самым рассуждением, которое использовалось при доказательстве утверждения 15.6 (отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, если замыкание образа любого множества $Z \subset X$ содержит образ замыкания Z).

Определим произведение $\gamma\gamma'$ формулой $\gamma\gamma'(\lambda) = \widetilde{\gamma\gamma'}(2\lambda)$.

Следующая лемма утверждает, что это произведение переводит гомотопные пути в гомотопные. Эта лемма тривиальна и интуитивно очевидна. В самом деле, произведение путей — это обход вдоль одного пути, потом вдоль другого; если мы непрерывно продеформируем оба пути, то произведение путей тоже продеформируется, а значит, будет гомотопно исходному произведению.

Лемма 15.18. *Определенная выше операция на $\Omega(M, m)$ переводит гомотопные пути в гомотопные: если путь γ_0 гомотопен γ_1, а путь γ'_0 гомотопен γ'_1, то путь $\gamma_0\gamma'_0$ гомотопен $\gamma_1\gamma'_1$.*

Доказательство. Пусть

$$\gamma\colon [0,1]\times[0,1] \to M, \quad \gamma'\colon [0,1]\times[0,1] \to M$$

— гомотопии, соединяющие γ_0 и γ_1, а также γ'_0 и γ'_1. Гомотопии путей — это отображения из квадрата в M, а то, что концы пути остаются в точке m, означает, что две стороны квадрата отображаются в m (остальные две стороны переходят в γ_0, γ_1 для первого квадрата и в γ'_0, γ'_1 для второго). Рассмотрим гомотопию между $\widetilde{\gamma_0\gamma'_0}$ и $\widetilde{\gamma_1\gamma'_1}$, полученную по формуле

$$\widetilde{\gamma\gamma'}(\lambda, t) = \begin{cases} \gamma(\lambda, t), & \text{если } \lambda \leqslant 1, \\ \gamma'(\lambda-1, t), & \text{если } \lambda \geqslant 1. \end{cases}$$

Вышеприведенное соображение (отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, если замыкание образа любого множества $Z \subset X$ содержит образ замыкания Z) показывает, что это отображение непрерывно и тем самым осуществляет гомотопию $\widetilde{\gamma_0\gamma'_0}$ и $\widetilde{\gamma_1\gamma'_1}$. Гомотопия $\gamma_0\gamma'_0$ и $\gamma_1\gamma'_1$ получается из этого, поскольку $\gamma_0\gamma'_0$ и $\gamma_1\gamma'_1$ получены из $\widetilde{\gamma_0\gamma'_0}$ и $\widetilde{\gamma_1\gamma'_1}$ репараметризацией. □

Из этой леммы следует, что произведение $(\gamma, \gamma' \to \gamma\gamma')$ — корректно определенная операция на множестве $\pi_1(M, m)$ классов гомотопической эквивалентности путей из m в m.

Теорема 15.19. *Определенная выше операция*

$$\pi_1(M, m) \times \pi_1(M, m) \to \pi_1(M, m)$$

задает структуру группы на $\pi_1(M)$.

Доказательство. Нужно проверить выполнение групповых аксиом. Роль единицы $\iota\colon [0,1] \to M$ играет отображение $[0,1]$ в точку $m \in M$. Эта петля называется *тривиальной*. Обозначим через $\varphi_0\colon [0,1] \to [0,1]$ отображение $t \to \max(0, 2t-1)$, а через $\varphi_1\colon [0,1] \to [0,1]$ — отображение $t \to \min(1, 2t)$.

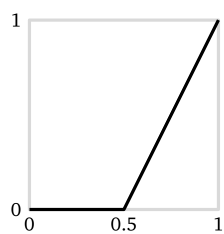


График функции $\varphi_0(t)$

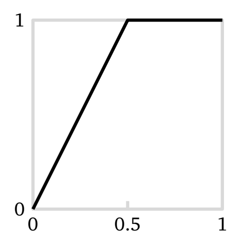


График функции $\varphi_1(t)$

Легко видеть, что $\gamma\iota = \varphi_0 \circ \gamma$, а $\iota\gamma = \varphi_1 \circ \gamma$. В силу леммы 15.9 функции φ_1 и φ_2 гомотопны друг другу и тождественному отображению $x \to x$ в классе функций, сохраняющих 0 и 1. Композиция уважает гомотопию (утверждение 15.5), следовательно, путь $\gamma\iota$ гомотопен $\iota\gamma$ и гомотопен γ.

Обратный элемент γ^{-1} к пути γ строится так: $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Рассмотрим функцию $\Phi\colon [0,1] \to [0,1]$, $\Phi(t) = \min(2t, 2-2t)$.

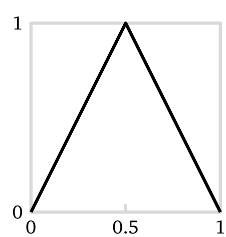
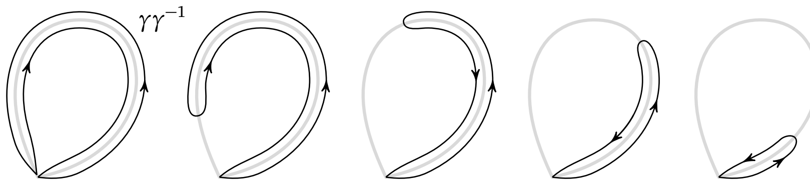


График функции $\Phi(t)$

Легко видеть, что $\gamma\gamma^{-1} = \Phi \circ \gamma$. Поскольку Φ гомотопен отображению $t \to 0$ в классе функций, переводящих 0 и 1 в 0 (лемма 15.9), путь $\gamma\gamma^{-1} = \Phi \circ \gamma$ гомотопен тривиальному.

Эту гомотопию можно увидеть из следующей картинки.



Стягивание петли $\gamma\gamma^{-1}$ в точку

Наконец, ассоциативность умножения видна из следующего рассуждения. Пусть γ_0, γ_1, γ_2 — три пути из m в m, а $\widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}\colon [0,3] \to$ $\to M$ — петля, определенная формулой

$$\widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\lambda) = \begin{cases} \gamma_0(\lambda), & \text{если } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ \gamma_1(\lambda - 1), & \text{если } 1 \leqslant \lambda \leqslant 2, \\ \gamma_2(\lambda - 2), & \text{если } 2 \leqslant \lambda \leqslant 3. \end{cases}$$

Рассмотрим функции $\psi_1, \psi_2\colon [0,1] \to [0,3]$, заданные формулами

$$\psi_1(t) = \max(2t, 4(t - 1/4)), \quad \psi_2(t) = \min(4t, 2(t + 1/2)).$$

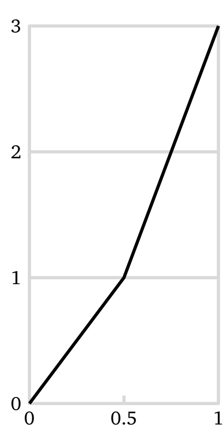


График функции $\psi_1(t)$

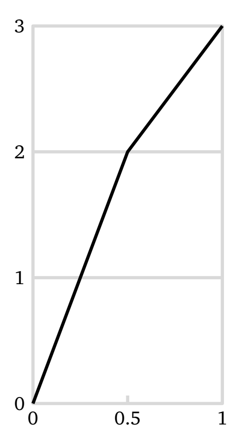


График функции $\varphi_2(t)$

Функции ψ_1 и ψ_2 кусочно линейные, их графики составлены из двух прямолинейных отрезков. У ψ_1 первый отрезок соединяет $(0,0)$ и $(1/2,1)$, второй отрезок соединяет $(1/2,1)$ и $(1,3)$. У ψ_2 первый отрезок соединяет $(0,0)$ и $(1/2,2)$, второй отрезок соединяет $(1/2,2)$ и $(1,3)$.

Легко видеть, что $\gamma_0(\gamma_1\gamma_2)=\psi_1\circ\widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\lambda)$ и $(\gamma_0\gamma_1)\gamma_2=\psi_2\circ\circ\widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\lambda)$ (проверьте). Поскольку ψ_1 и ψ_2 гомотопны, из этого следует, что гомотопны петли $\gamma_0(\gamma_1\gamma_2)$ и $(\gamma_0\gamma_1)\gamma_2$. Мы доказали, что $\pi_1(M,m)$ — группа. $\square$

Определение 15.20. Группа $\pi_1(M,m)$, определенная выше, называется *фундаментальной группой* топологического пространства (M,m).

Замечание 15.21. Пусть $f\colon (X,x)\to(Y,y)$ — морфизм пунктированных пространств. Для любого пути $\gamma\in\Omega(X,x)$ композиция $\gamma\circ f$ задает путь в (Y,y). Пользуясь тем, что композиции f с гомотопными отображениями гомотопны (утверждение 15.5), мы получаем, что $\gamma\to\gamma\circ f$ определяет отображение на классах эквивалентности петель $\pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,y)$. Из конструкции этого отображения сразу ясно, что это гомоморфизм групп. Отображение фундаментальных групп, индуцированное морфизмом f, часто обозначается той же самой буквой.

Замечание 15.22. Напомним, что *функтор* из категории $\mathscr{C}_1$ в $\mathscr{C}_2$ задается отображением

$$F\colon \mathscr{O}b(\mathscr{C}_1)\to\mathscr{O}b(\mathscr{C}_2)$$

и отображениями

$$F\colon \mathscr{M}or(X,Y)\to\mathscr{M}or(F(X),F(Y)),$$

определенными для любых $X,Y\in\mathscr{O}b(\mathscr{C}_1)$, переводящими Id_X в $\mathrm{Id}_{F(X)}$ и совместимыми со взятием композиций.

Замечание 15.23. Взятие фундаментальной группы определяет функтор из категории пунктированных пространств в категорию групп (проверьте это).

Замечание 15.24. Пусть $f_0,f_1\colon (X,x)\to(Y,y)$ — гомотопные отображения. Тогда соответствующие гомоморфизмы фундаментальных групп совпадают. В самом деле, если f_0 гомотопно f_1, то $\gamma\circ f_0$ гомотопно $\gamma\circ f_1$ для любой петли $\gamma\in\Omega(X,x)$.

15.4. Стягиваемые пространства, ретракты, гомотопическая эквивалентность

Определение 15.25. Пусть (X, x) — пунктированное топологическое пространство. Рассмотрим отображение $\iota_x : X \to X$, переводящее все точки пространства X в x. Пространство X называется *стягиваемым*, если ι_x гомотопно тождественному отображению Id_X.

Пример 15.26. Пусть (X, x) — подмножество в $\mathbb{R}^n$. Это подмножество называется *звездчатым*, если для любой точки $x' \in X$ отрезок $[x, x']$ целиком лежит в X. Рассмотрим отображение

$$\Psi\colon\ X \times [0, 1] \to X,$$

переводящее (x', t) в $x - t(x - x')$. Легко видеть, что Ψ — гомотопия Id_X и ι_x (докажите это). Мы получили, что любое звездчатое подмножество стягиваемо.

Замечание 15.27. Пусть (X, x) — стягиваемое пространство. Легко видеть, что отображение $\iota_x : X \to X$ задает тривиальный гомоморфизм $\iota_x : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ (все элементы группы $\pi_1(X, x)$ переходят в 1). Поскольку отображение ι_x гомотопно тождественному, а гомотопные отображения топологических пространств индуцируют одинаковые отображения фундаментальных групп, тождественное отображение $\mathrm{Id}\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ равно отображению, переводящему все элементы в 1. Поэтому $\pi_1(X, x) = \{1\}$.

Определение 15.28. Если $\pi_1(X, x) = \{1\}$, то пунктированное пространство (X, x) называется *односвязным*. В этой ситуации еще говорят, что у (X, x) *нулевая фундаментальная группа*.

Определение 15.29. Пусть $X \subset Y$ — подмножество. Предположим, что существует отображение $\Psi_1 : Y \to X$, тождественное на $X \subset Y$ и гомотопное тождественному отображению Id_Y. В этом случае X называется *деформационным ретрактом* пространства Y. Гомотопия Ψ_1 и Id_Y называется *деформационной ретракцией Y на X*.

Пример 15.30. Пусть Y — множество всех ненулевых векторов в $\mathbb{R}^n$, а $X \subset Y$ — единичная сфера. Рассмотрим отображение $\Psi_1 : Y \to X$, $v \to \frac{v}{|v|}$. Отображение Ψ_1 гомотопно тождественному:

$$\Psi(v, t) = \frac{v}{|v|^t}$$

осуществляет гомотопию Ψ_1 и $\Psi_0 = \mathrm{Id}_Y$.

Замечание 15.31. Отмеченное пространство (X, x) является стягиваемым тогда и только тогда, когда $\{x\}$ — деформационный ретракт X.

Определение 15.32. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ — непрерывные отображения топологических пространств, причем $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям из X в X и из Y в Y. Такие отображения называются *гомотопическими эквивалентностями*, а X и Y — *гомотопически эквивалентными*.

Аналогичным образом определяется гомотопическая эквивалентность пунктированных пространств. Морфизм $f\colon (X, x) \to \to (Y, y)$ — гомотопическая эквивалентность, если задан морфизм $g\colon (Y, y) \to (X, x)$, причем $g \circ f$ гомотопно Id_Y, а $f \circ g$ гомотопно Id_X как морфизм пунктированных пространств.

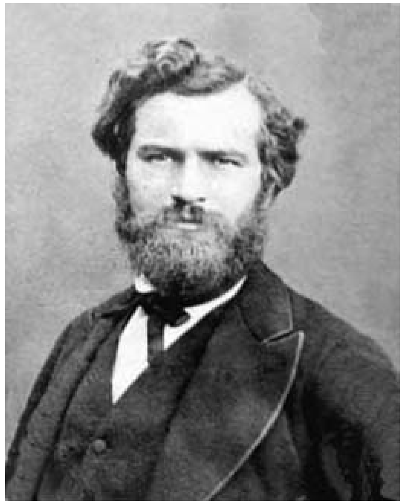
Пример 15.33. Если $j\colon X \hookrightarrow Y$ — деформационный ретракт, то пространство X гомотопически эквивалентно Y. Действительно, естественное вложение $j\colon X \hookrightarrow Y$ в композиции с $\Psi_1\colon Y \to X$ дает Id_X, а композиция $\Psi_1 \circ j$ гомотопна Id_Y по определению деформационного ретракта. В частности, любое стягиваемое пространство гомотопически эквивалентно точке.

Замечание 15.34. Пусть $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ — гомотопическая эквивалентность пунктированных пространств, индуцирующая отображение фундаментальных групп $f\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$. Тогда существуют такие морфизмы g, g', что $g \circ f$ гомотопно Id_Y, а $f \circ g'$ гомотопно Id_X. Значит, у отображения $f\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ нет ядра (потому что на фундаментальных группах $f \circ g' = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x)}$). С другой стороны, поскольку $g \circ f = \mathrm{Id}_{\pi_1(Y,x)}$, отображение $f\colon \pi_1(X, x) \to \to \pi_1(Y, y)$ сюръективно. Мы доказали, что это изоморфизм групп.

Следствие 15.35. *Пусть (X, x) и (Y, y) — гомотопически эквивалентные пунктированные пространства. Тогда $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.*

15.5. История, замечания

Понятие гомотопии и фундаментальной группы было впервые строго определено Пуанкаре в 1895 г.. Гомотопные пути и фундаментальную группу определил в 1866 г. Камилл Жордан; впрочем, Жордан в работах по топологии не пользовался понятием группы (которое он сам же и ввел, тоже в 1860-х гг., следуя Галуа, в работах о разрешимости алгебраических уравнений).



Мари Энмон Камилл Жордан
(Marie Ennemond Camille Jordan, 1838—1922)

Фундаментальная группа есть первый (и самый простой) алгебраический инвариант топологических пространств. Существует немало функторов аналогичной природы: гомотопические группы, когомологии, K-теория, кобордизмы и т. д. Эти конструкции изучаются в алгебраической топологии методами теории категорий.

Строгое изучение топологии затруднено патологичностью общих топологических пространств. Алгебраические топологи по большей части ограничиваются *CW-комплексами* — пространствами, которые склеены из симплексов (многомерных тетраэдров) наподобие многогранников.

В большинстве курсов топологии никакие другие пространства, кроме CW-комплексов, не рассматриваются или практически не рассматриваются. Ограничив таким образом класс изучаемых пространств, можно перевести на язык категорий любое геометрическое утверждение.

В той (достаточно общей) геометрической ситуации, с которой имеют дело в метрической геометрии и анализе, считать алгебраические инварианты пространств чрезвычайно затруднительно. По этой причине предмет алгебраической топологии практически никак не соотносится с предметом общей топологии. С другой стороны, без понимания основ общей топологии заниматься геометрией и топологией проблематично.

Основные достижения математики XX века относились к алгебраической топологии и алгебраической геометрии; на протяжении столетия эти две науки параллельно и чрезвычайно интенсивно развивались, используя язык категорий и гомологической алгебры, специально разработанный для такой цели.

Каноническим учебником алгебраической топологии является книжка Д. Б. Фукса и А. Т. Фоменко «Курс гомотопической топологии». Для других целей полезен том Р. Свитцера «Алгебраическая топология: гомотопии и гомологии». Теории категорий посвящен учебник С. Маклейна «Категории для работающего математика». Гомологическая алгебра изложена в прекрасной книге «Методы гомологической алгебры» С. И. Гельфанда и Ю. И. Манина.

Лекция 16

НАКРЫТИЯ ГАЛУА

16.1. Факторпространства

Определение 16.1. Пусть M — топологическое пространство, а $\sim$ — отношение эквивалентности. Подмножество $U \subset M/{\sim}$ множества классов $M/{\sim}$ называется *открытым*, если его прообраз в M открыт. Проверьте, что это определяет топологию на $M/{\sim}$. Такая топология называется *фактортопологией*, а пространство $M/{\sim}$ — *факторпространством.*

Определение 16.2. Пусть задано множество M. Легко видеть, что множество биекций $\mathrm{Bij}(M, M)$ из M в M образует группу с операцией композиции. Напомним, что группа G *действует на множестве* M, если задан гомоморфизм из G в группу биекций $\mathrm{Bij}(M, M)$. Иначе говоря, для любых $g \in G$, $m \in M$ задана точка $g(m)$, при этом $g(g_1(m)) = gg_1(M)$ для любых $g, g_1 \in G$.

Определение 16.3. В такой ситуации *орбитой* точки $x \in M$ называется множество

$$Gx := \{y \in M\colon\ y = gx, g \in G\}$$

всех точек, которые можно получить из x действием G.

Определение 16.4. Пусть M — топологическое пространство, а G — группа. Мы говорим, что G *действует на топологическом пространстве* M, или G *непрерывно действует на* M, если G действует на M, причем для любого $g \in G$ отображение $m \to gm$ непрерывно.

Замечание 16.5. Аналогичным образом определяется действие группы G на объекте категории $\mathscr{C}$. *Действием группы* на $X \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ называется такое отображение $G \to \mathscr{M}or(X, X)$, что произведение элементов группы переходит в композицию морфизмов.

Определение 16.6. Пусть G — группа, действующая на топологическом пространстве M. *Факторпространством* по действию группы называется пространство классов эквивалентности $M/{\sim}$, где $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите группы G. Также факторпространство называют *пространством орбит действия группы* G.

Задача 16.1. Пусть M хаусдорфово, а G — группа, непрерывно действующая на M. Всегда ли факторпространство M/G хаусдорфово?

Замечание 16.7. Пусть G — группа, действующая на топологическом пространстве M. Тогда естественная проекция $M \xrightarrow{\pi} M/G$ является открытым отображением. В самом деле, пусть U — открытое множество, а GU — объединение всех точек вида gu, $g \in G$, $u \in \in U$. Тогда GU — объединение открытых множеств вида gU, и оно открыто. Поскольку $\pi^{-1}(\pi(U)) = GU$, образ $\pi(U)$ открыт в M/G.

16.2. Категория накрытий

Определение 16.8. Пусть M, $\widetilde{M}$ — топологические пространства, а $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — непрерывное отображение. Отображение π называется *этальным*, если у каждой точки $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ есть такая окрестность $\widetilde{U} \ni \tilde{x}$, что $\pi|_{\widetilde{U}}\colon \widetilde{U} \to \pi(\widetilde{U})$ — гомеоморфизм. Это отображение называется *накрытием*, если у каждой точки $x \in M$ есть такая окрестность $U \ni x$, что $\pi^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times S$, где S — топологическое пространство с дискретной топологией, а отображение $\pi|_{\pi^{-1}(U)}\colon \pi^{-1}(U) \to U$ при таком изоморфизме совпадает с проекцией $U \times S \to U$. *Базой накрытия* называется M, а его *слоем* над точкой x — прообраз $\pi^{-1}(x)$.

Замечание 16.9. Легко видеть, что любое накрытие этально (проверьте это).

Замечание 16.10. Пусть $U \subset X$ — открытое подмножество, не являющееся замкнутым. Отображение вложения $j\colon U \to X$ этально, но не является накрытием (проверьте).

Задача 16.2. Пусть M — связно, а $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — накрытие. Докажите, что слой $\pi^{-1}(x)$ равномощен $\pi^{-1}(y)$ для любых $x, y \in M$.

Пример 16.11. Отождествим окружность S^1 с одномерным тором $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Естественная проекция $\mathbb{R} \to S^1$ является накрытием (докажите). Проекция $\mathbb{R}^n$ на тор $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ также является накрытием (докажите это).

Определение 16.12. Пусть G — группа, действующая на топологическом пространстве M. Говорится, что действие G *вполне разрывно*, если для любого компакта K множество тех $g \in G$, для которых $K \cap gK \neq \varnothing$, конечно. Действие *свободно*, если $g(m) \neq h(m)$ для любых различных $g, h \in G$ и любого $m \in M$.

Утверждение 16.13. *Пусть G — группа, свободно и вполне разрывно действующая на локально компактном топологическом пространстве M. Тогда проекция $\pi\colon M \to M/G$ является накрытием.*

Доказательство. Пусть $x \in M$ — любая точка, а $U \ni x$ — окрестность, удовлетворяющая условию $U \cap gU = \varnothing$ для любого нетривиального $g \in G$. Чтобы найти такую окрестность, возмем открытое множество $U \ni x$ с компактным замыканием, и пусть $g_1, \ldots, g_n$ — все элементы группы G, для которых $g_i(U) \cap U \neq \varnothing$. Воспользовавшись отделимостью, мы найдем такое открытое подмножество V, $x \in V \subset \subset U$, что $V \cap g_i(U) = \varnothing$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда все множества вида $g(V)$ не пересекаются, а прообраз $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} g(V)$ есть $V \times G$. □

Пример 16.14. Примеры вполне разрывного действия группы на топологическом пространстве приведены выше ($\mathbb{R} \to S^1$, $\mathbb{R}^n \to T^n$). Подобных примеров можно изобрести немало.

Задача 16.3. Пусть M — группа верхнетреугольных матриц (матриц, у которых на диагонали 1, ниже диагонали 0), а Γ — множество верхнетреугольных матриц с целыми коэффициентами. Докажите, что Γ — группа. Рассмотрим действие Γ на M по формуле $\gamma(m) = \gamma \cdot m$, где «$\cdot$» обозначает умножение матриц. Докажите, что это действие вполне разрывно.

Определение 16.15. Пусть $\pi\colon \widetilde{M} \to M$, $\pi'\colon \widetilde{M}' \to M$ — накрытия пространства M. Непрерывное отображение $\psi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}'$ называется *морфизмом накрытий*, если $\psi \circ \pi' = \pi$.

Соотношения наподобие $\psi \circ \pi' = \pi$ часто изображают посредством диаграммы

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \widetilde{M}' \arrow[d, "\pi'"] \\ & M, \end{tikzcd} \tag{16.2.1}$$

в вершинах которой стоят объекты категории, а стрелки обозначают морфизмы. Говорится, что эта диаграмма *коммутативна*, если морфизм, полученный композицией стрелок, идущих из одного объекта в другой, не зависит от выбора пути по стрелкам.

В частности, диаграмма (16.2.1) коммутативна тогда и только тогда, когда $\psi \circ \pi' = \pi$.

Замечание 16.16. Накрытия пространства M образуют категорию. Объекты этой категории — накрытия M, а морфизмы определены выше. Ассоциативность композиции морфизмов и существование тождественного морфизма очевидны (проверьте это).

Замечание 16.17. Множество морфизмов из $\widetilde{M}$ в $\widetilde{M}'$ обозначается $\mathscr{M}or(\widetilde{M}, \widetilde{M}')$. Когда надо подчеркнуть зависимость от M, пишут

$$\mathscr{M}or_M(\widetilde{M}, \widetilde{M}')$$

(читается: «множество морфизмов $\widetilde{M}$ в $\widetilde{M}'$ над M»).

Определение 16.18. Пусть $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — накрытие. Мы говорим, что оно *расщепляется*, если $\widetilde{M} = M \times V$, где V — множество с дискретной топологией, и это разложение совместимо с проекцией в M. Расщепляющееся накрытие также называют *тривиальным*.

Определение 16.19. Пусть $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — накрытие. Если $U \subset M$ — открытое подмножество, то $\pi|_{\pi^{-1}(U)}\colon \pi^{-1}(U) \to U$ тоже накрытие (проверьте). Оно называется *ограничением накрытия π на U*. Ограничение накрытия π на достаточно малое открытое множество $U \subset \subset M$ тривиально по определению накрытия. Это свойство часто выражают, говоря, что накрытие *локально тривиально*, а чтобы уточнить, что локальность понимается как локальность по M, говорят, что оно *локально тривиально по базе*, или *локально тривиально по M*.

Замечание 16.20. Пусть M связно, а $\widetilde{M} \to M$ — тривиальное накрытие M. Тогда $\widetilde{M} = M \times S$, где S — множество связных компонент пространства $\widetilde{M}$. В частности, все связные компоненты $\widetilde{M}$ проектируются на M гомеоморфно.

Замечание 16.21. Пусть M связно, а $\psi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}'$ — морфизм тривиальных накрытий над M. Тогда $\widetilde{M} = M \times S$ и $\widetilde{M}' = M \times S'$, где S, S' — множество связных компонент пространств $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}'$. Образ связной компоненты $\widetilde{M}$ связен, следовательно, лежит целиком в связной компоненте $\widetilde{M}'$. Пусть $\psi_S\colon S \to S'$ — отображение, индуцированное морфизмом ψ на связных компонентах. Тогда $\psi(m, s) = (m, \psi_S(s))$ (проверьте).

Определение 16.22. Топологическое пространство M называется *локально связным*, если у него есть база связных окрестностей, и *локально линейно связным*, если у него есть база линейно связных окрестностей.

Замечание 16.23. Отметим, что из связности не следует локальная связность, а из линейной связности не следует локальная линейная связность. С другой стороны, локально линейно связное связное пространство линейно связно (см. доказательство леммы 16.26 ниже).

Утверждение 16.24. *Пусть $\psi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}'$ — морфизм накрытий над M, причем M локально связно. Тогда ψ — это накрытие над $\widetilde{M}'$.*

Доказательство. Это утверждение локально по M, значит, можно предположить, что M связно, а накрытия пространств $\widetilde{M}$ и $\widetilde{M}'$ расщепляются. В силу замечания 16.21 $\widetilde{M} = M \times S$, $\widetilde{M}' = M \times S'$, а $\psi(m, s) = (m, \psi_S(s))$, где ψ_S — отображение, индуцированое ψ на множестве компонент связности $\widetilde{M}$ и $\widetilde{M}'$. Но отображение $\psi(m, s) = (m, \psi_S(s))$ является тривиальным накрытием на каждой связной компоненте $\widetilde{M}'$. Поэтому ψ — локально тривиальное накрытие $\widetilde{M}'$ (проверьте). □

16.3. Односвязные пространства

Определение 16.25. Связное топологическое пространство M называется *этально односвязным*, если любое его накрытие расщепляется.

Впоследствии нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 16.26. *Пусть $\widetilde{M} \to M$ — накрытие, причем M локально линейно связно, а $\widetilde{M}$ связно. Тогда $\widetilde{M}$ линейно связно.*

Доказательство. Поскольку M локально линейно связно, $\widetilde{M}$ тоже локально линейно связно. Объединение всех линейно связных множеств, содержащих точку $x \in \widetilde{M}$, открыто в $\widetilde{M}$ в силу локальной линейной связности $\widetilde{M}$. Это задает разбиение $\widetilde{M}$ в компоненты линейной связности, которые открыты. А поскольку $\widetilde{M}$ связно, такая компонента всего одна. □

Теорема 16.27. *Любое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$ этально односвязно.*

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть M — выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — накрытие. Поскольку M локально связно (докажите это), $\widetilde{M}$ локально связно. Поэтому $\widetilde{M}$ — несвязное объединение своих компонент связности. Для доказательства этальной односвязности M достаточно убедиться, что каждая из этих компонент связности является тривиальным накрытием M. Поэтому можно считать, что $\widetilde{M}$ связно.

Шаг 2. Поскольку $\widetilde{M}$ связно, а M линейно связно (докажите), $\widetilde{M}$ линейно связно в силу леммы 16.26.

Шаг 3. Рассмотрим M как метрическое пространство с евклидовой метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^n$. Любые две точки $x, y \in \widetilde{M}$

можно соединить путем

$$\gamma\colon [a,b] \to \widetilde{M},$$

потому что $\widetilde{M}$ линейно связно. Определим длину пути $l(\gamma)$ как длину его образа $\gamma_\pi := \gamma \circ \pi$ в M. Если две точки $\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon)$ содержатся в окрестности $U \subset \widetilde{M}$, которая гомеоморфно проектируется на выпуклое подмножество $U \subset M$, то можно заменить участок $(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))$ пути γ на прообраз отрезка, соединяющего точки $\pi(\gamma(t)), \pi(\gamma(t+\varepsilon))$. По определению накрытия γ покрывается такими открытыми множествами целиком (проверьте это). Поскольку $\gamma([a,b])$ компактно, его можно покрыть конечным набором таких открытых множеств. Заменив каждый сегмент $(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))$ на прямолинейный, как указано выше, мы получим путь γ, который проектируется в ломаную $\gamma_\pi\colon [a,b] \to M$. Следовательно, любые две точки можно соединить путем конечной длины. Определим метрику на $\widetilde{M}$ по формуле

$$\tilde{d}(x,y) = \inf_\gamma l(\gamma),$$

где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y. Легко видеть, что эта формула задает на $\widetilde{M}$ метрику (докажите).

Шаг 4. Метрика $\tilde{d}$ задает на пространстве $\widetilde{M}$ топологию, в которой небольшой окрестностью точки $x \in \widetilde{M}$ будет связная компонента прообраза $\pi^{-1}(U)$, где $U \ni \pi(x)$ — окрестность точки $\pi(x)$. Следовательно, метрика $\tilde{d}$ согласована с исходной топологией на $\widetilde{M}$.

Шаг 5. Докажем, что $\widetilde{M}$ с такой метрикой полно. Легко видеть, что $\tilde{d}(x,y) \geqslant d(\pi(x), \pi(y))$ (докажите). Поэтому для любой последовательности Коши $\{x_i\}$ в $\widetilde{M}$ ее образ $\{\pi(x_i)\}$ — последовательность Коши. Поскольку M полно, $\{\pi(x_i)\}$ сходится к точке $\underline{x} \in M$. Поэтому почти все члены последовательности $\{x_i\}$ содержатся в $\pi^{-1}(U)$ для любой окрестности $U \ni x$. Без ограничения общности можно считать, что окрестность U выбрана ограниченной, следовательно, замыкание $\overline{U}$ компактно. Выбрав U достаточно малой, можно считать, что $\pi^{-1}(\overline{U})$ — объединение непересекающихся компактов (компонент связности прообраза $\pi^{-1}(\overline{U})$), гомеоморфных $\overline{U}$. Эти компоненты связности отстоят друг от друга на положительное расстояние, а значит, почти все элементы последовательности Коши $\{x_i\}$ содержатся в одной из связных компонент (докажите). Обозначим эту связную компоненту через U_0. По построению U_0

изометрически проектируется на U. Следовательно, $\{x_i\}$ сходится к $\pi^{-1}(\underline{x})\cap U_0$. Полнота $\widetilde{M}$ доказана.

Шаг 6. По построению метрика в $\widetilde{M}$ является внутренней (вычисляется как длина путей), а значит, удовлетворяет условию Хопфа—Ринова. Также это пространство полно (шаг 5) и локально компактно (оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^n$). По теореме Хопфа—Ринова расстояние в $\widetilde{M}$ реализуется геодезическими, т. е. для любых таких $x, y \in \widetilde{M}$, что $\tilde{d}(x, y) = a$, имеется изометрическое вложение $\gamma\colon [0, a] \to \widetilde{M}$.

Шаг 7. Пусть $x \in \widetilde{M}$. Тогда x содержится в окрестности $U \subset \widetilde{M}$, которая проектируется гомеоморфно в $\pi(U)$. Заменив U на окрестность поменьше, можно считать, что $\pi(U)$ выпукло (докажите это). Для любой точки $y \in U$ имеем $\tilde{d}(x, y) = d(\pi(x), \pi(y))$, потому что можно соединить $\pi(x)$ и $\pi(y)$ отрезком, а потом поднять этот отрезок в $\widetilde{M}$, воспользовавшись тем, что $U \to \pi(U)$ — гомеоморфизм. Поэтому геодезические в $\widetilde{M}$ проектируются в отрезки прямой. Следовательно, $\pi\colon (\widetilde{M}, \tilde{d}) \to (M, d)$ — изометрия. Мы доказали, что π — гомеоморфизм. $\square$

Следствие 16.28. *Отрезок, квадрат, шар этально односвязны.*

16.4. Поднятие накрытия

Определение 16.29. Пусть $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — накрытие, а $\psi\colon X \to M$ — непрерывное отображение. Отображение $\tilde{\psi}\colon X \to \widetilde{M}$ называется *поднятием* ψ, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{\psi}"] \arrow[r, "\psi"'] & M. \end{tikzcd}$$

Определение 16.30. Пусть $\psi\colon X \to M$, $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — непрерывные отображения. Рассмотрим подмножество $\widetilde{X} \subset X \times \widetilde{M}$, состоящее из всех пар $(x, \tilde{m})$, для которых $\psi(x) = \pi(\tilde{m})$, с топологией, индуцированной с $X \times \widetilde{M}$. Это пространство называется *расслоенным произведением* пространств X и $\widetilde{M}$ и обозначается $X \times_M \widetilde{M}$.

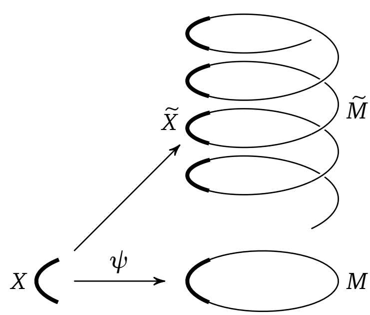
Задача 16.4. Пусть M хаусдорфово. Проверьте, что $X \times_M \widetilde{M}$ — замкнутое подмножество в $X \times \widetilde{M}$.

Пусть $\pi\colon \widetilde{M}\to M$ — накрытие, а $\psi\colon X\to M$ — непрерывное отображение. Пусть $\widetilde{X}$ — расслоенное произведение X и $\widetilde{M}$ над M. Обозначим через π_X проекцию из $\widetilde{X}$ на X. В окрестности $U\ni\psi(x)$ расслоение π расщепляется: $\pi^{-1}(U)=U\times S$. Поэтому в $U_X:=\psi^{-1}(U)$ имеем $\pi_X^{-1}(U_X)=U_X\times S$ (проверьте это). Значит, это накрытие. Мы получили следующую простую лемму.

Лемма 16.31. *Пусть $\pi\colon \widetilde{M}\to M$ — накрытие, а $\psi\colon X\to M$ — непрерывное отображение. Тогда расслоенное произведение $X\times_M\widetilde{M}$ — накрытие пространства X.*

Определение 16.32. В такой ситуации отображение $X\times_M\widetilde{M}\to\to X$ называется *индуцированным накрытием пространства X*.

Следующая теорема важная, но простая. Ее доказательство вполне очевидно из иллюстрации, приведенной ниже.



Поднятие отображения $\psi\colon X\to M$ на накрытие

Теорема 16.33. *Пусть $\pi\colon \widetilde{M}\to M$ — накрытие, а $\psi\colon X\to M$ — непрерывное отображение. Предположим, что X этально односвязно. Тогда существует поднятие $\tilde{\psi}\colon X\to\widetilde{M}$. Более того, для любой точки $x\in X$ и любой точки $\tilde{x}\in\pi^{-1}(\psi(x))$ существует и единственно поднятие $\tilde{\psi}\colon X\to\widetilde{M}$, для которого $\tilde{\psi}(x)=\tilde{x}$.*

Доказательство. Пусть $\pi_X\colon\widetilde{X}\to X$ — индуцированное накрытие. Поскольку оно расщепляется, имеем $\widetilde{X}=X\times S$. Для каждой из компонент связности $X\subset\widetilde{X}$ естественная проекция $\widetilde{X}\to\widetilde{M}$ задает поднятие $\tilde{\psi}\colon X\to\widetilde{M}$. Каждое из таких поднятий единственным образом определяется выбором компоненты связности, но эти компоненты параметризованы точками прообраза $\pi^{-1}(\psi(x))$: каждая из компонент содержит ровно одну из точек этого множества. $\square$

16.5. Накрытия и пути

Замечание 16.34. Пусть (M, m) — пространство с отмеченной точкой, $(\widetilde{M}, \tilde{m})$ — его накрытие, а $\gamma \in \Omega(M, m)$ — петля. Поскольку отрезок этально односвязен, отображение $\gamma\colon [0, 1] \to M$ поднимается единственным образом до пути $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to \widetilde{M}$, причем $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{m}$. Такой путь называется *поднятием петли γ на накрытие*. Понятно, что $\tilde{\gamma}$ уже не петля: точка $\tilde{\gamma}(0)$ может быть не равна $\tilde{\gamma}(1)$.

Утверждение 16.35. *Пусть (M, m) — пунктированное пространство,*

$$(\widetilde{M}, \tilde{m}) \to (M, m)$$

— его накрытие, $\gamma, \gamma' \in \Omega(M, m)$ — гомотопные петли, а $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$ — их поднятия. Тогда $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$.

Доказательство. Пусть $h\colon [0, 1] \times [0, 1] \to M$ — отображение из квадрата, которое осуществляет гомотопию γ и γ'. По определению, h переводит две противоположные стороны квадрата в γ и γ', а две другие — в m. Поскольку квадрат односвязен, h поднимается до $\tilde{h}\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \widetilde{M}$ таким образом, что $(0, 0)$ переходит в $\tilde{m}$. На двух сторонах квадрата h постоянно, но поднятие тривиального пути, очевидно, тривиально. Поэтому на этих двух сторонах $\tilde{h}$ тоже постоянно. Значит,

$$\tilde{\gamma}(1) = \tilde{h}(1, 0) = \tilde{h}(1, 1) = \tilde{\gamma}'(1). \qquad \square$$

Следствие 16.36. *Пусть (M, m) — связное и локально линейно связное пунктированное пространство, которое имеет тривиальную фундаментальную группу. Тогда M этально односвязно.*

Доказательство. Рассмотрим накрытие $\pi\colon \widetilde{M} \to M$. Достаточно доказать, что $\widetilde{M}$ тривиально, если оно связно. Пусть $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(x)$. Поскольку $\widetilde{M}$ локально линейно связно и связно, оно линейно связно, а значит, точки x_1, x_2 можно соединить путем $\tilde{\gamma}$. Рассмотрим путь $\gamma := \tilde{\gamma} \circ \pi$. Этот путь гомотопен тривиальному, потому что $\pi_1(M, m) = \{1\}$. Поднятие тривиального пути тривиально, а значит, оба его конца совпадают. В силу утверждения 16.35 то же верно и для γ, значит, $x_1 = x_2$. $\square$

Обратное утверждение тоже верно, хотя и в более ограничительных предположениях.

Для доказательства этого полезно изучить, как зависит $\pi_1(M, m)$ от точки $m \in M$. Пусть $x, y \in M$, а ξ — путь из x в y. Для каждой петли $\gamma \in \Omega(M, y)$ рассмотрим путь $\xi\gamma\xi^{-1}$, определенный по формуле

$$\xi\gamma\xi^{-1}(\lambda) = \begin{cases} \xi(3\lambda), & \text{если } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1/3, \\ \gamma(3\lambda - 1), & \text{если } 1/3 \leqslant \lambda \leqslant 2/3, \\ \xi(3\lambda - 2), & \text{если } 2/3 \leqslant \lambda \leqslant 1 \end{cases}$$

(идем из x в y по ξ, обходим y по γ и возвращаемся в x в обратную сторону по ξ). Легко видеть, что $\xi\gamma\gamma'\xi^{-1}$ гомотопно $\xi\gamma\xi^{-1}\xi\gamma'\xi^{-1}$ (докажите). Поэтому отображение $\gamma \to \xi\gamma\xi^{-1}$ задает гомоморфизм групп

$$\pi_1(M, y) \to \pi_1(M, x).$$

Этот гомоморфизм, очевидно, обратим (докажите), а следовательно, группа $\pi_1(M, y)$ изоморфна $\pi_1(M, x)$. Нетрудно убедиться, что этот изоморфизм зависит от выбора пути γ.

Обозначим через $\pi_1(m, x)$ множество гомотопических классов путей из m в x. То же рассуждение, что и выше, позволяет построить биекцию между $\pi_1(m, x)$ и $\pi_1(M, m)$.

Пусть (M, m) — пунктированное пространство, связное и локально линейно связное. Предположим, что у M есть база топологии, состоящая из множеств U, для которых $\pi_1(U) = \{1\}$. Зафиксируем такое U, его точку x, и пусть γ — путь из m в x. Обозначим через $\mathcal{U}_\gamma$ множество всех пар $(y, \gamma' \in \pi_1(m, y))$, где $y \in U$ и существует путь ν из y в x, целиком лежащий в U и такой, что $\gamma'\nu\gamma^{-1}$ гомотопно нулю (тривиальному пути). Поскольку все пути из x в y, лежащие в U, гомотопны, естественная проекция из $\mathcal{U}_\gamma$ в U — гомеоморфизм (проверьте это).

Пусть $\widetilde{M}$ — множество всех пар $(x, \gamma \in \pi_1(m, x))$ с топологией, база которой задана множествами вида $\mathcal{U}_\gamma$. Легко видеть, что пересечение таких множеств имеет такой же вид, и поэтому $\mathcal{U}_\gamma$ задает топологию на $\widetilde{M}$. Естественная проекция $\widetilde{M} \to M$ этальна по построению, а поскольку $\pi^{-1}(U)$ — объединение $\mathcal{U}_\gamma$ для всех гомотопических классов путей из m в $x \in U$, π — накрытие.

Наконец, пусть $\gamma \in \pi_1(M, m)$ — класс, не гомотопный нулю, и пусть $\tilde{\gamma}$ — его поднятие в $\widetilde{M}$, в котором $\gamma(0)$ соответствует паре (m, γ_0), где γ_m — тривиальный путь. Тогда $\gamma(1)$ соответствует паре (m, γ), значит, накрытие $\widetilde{M} \to M$ нетривиально.

Мы получили следующее утверждение.

Утверждение 16.37. *Пусть (M, m) — пунктированное пространство, которое связно и локально линейно связно. Предположим, что у M есть база топологии, состоящая из множеств U, для которых $\pi_1(U) = \{1\}$, и M этально односвязно. Тогда $\pi_1(M, m) = \{1\}$.* $\square$

Замечание 16.38. Исторически односвязность M означает, что $\pi_1(M, m) = \{1\}$. В большинстве книг по топологии односвязность определяют именно так. В предположениях утверждения 16.37, $\pi_1(M, m) = \{1\}$ тогда и только тогда, когда любое накрытие M расщепляется, значит, в этой ситуации этальная односвязность равносильна обычной.

Замечание 16.39. Пусть $\pi_1(M, m) \neq \{1\}$. Накрытие $\widetilde{M}$, которое строится в доказательстве утверждения 16.37, можно построить явно, используя топологию на пространстве путей, которую мы определили в лекции 11. Пусть $\widetilde{\Omega}(M, m)$ — пространство всех путей с начальной точкой m. Предположим, что у каждого пути $\gamma \in \Omega(M, m)$, ведущего из m в x, есть окрестность в топологии на $\widetilde{\Omega}(M, m)$, все точки которой гомотопны γ в классе путей из m в x. В условиях утвреждения 16.37 это верно (докажите). Будем считать, что $\gamma \sim \gamma'$, если γ, γ' — гомотопные пути из m в x. Обозначим через $\widetilde{M}$ факторпространство $\widetilde{\Omega}(M, m)$ по этому отношению эквивалентности. Естественная проекция $\widetilde{M} \to M$, переводящая γ в $x = \gamma(1)$, является накрытием и эквивалентна накрытию $\widetilde{M}$, построенному выше (проверьте). Мы не будем пользоваться этим наблюдением.

16.6. Произведение накрытий

Определение 16.40. Пусть $\pi\colon \widetilde{M} \to M$, $\pi'\colon \widetilde{M}' \to M$ — накрытия пространства M. Рассмотрим расслоенное произведение $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}' \subset \subset \widetilde{M} \times \widetilde{M}'$, состоящее из всех $(x, y) \in \widetilde{M} \times \widetilde{M}'$, для которых $\pi(x) = = \pi'(y)$. Тогда $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}'$ называется *произведением накрытий*.

Замечание 16.41. Произведение $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}'$ является накрытием пространства M. В самом деле, если $\widetilde{M}$ изоморфно $S \times M$ локально по M, а $\widetilde{M}'$ изоморфно $S' \times M$ локально по M, то $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}'$ локально изоморфно $S \times S' \times M$.

Замечание 16.42. Легко видеть, что для любого накрытия M_1 над M выполняется равенство

$$\mathscr{M}or(M_1, \widetilde{M} \times_M \widetilde{M}') = \mathscr{M}or(M_1, \widetilde{M}) \times \mathscr{M}or(M_1, \widetilde{M}').$$

Определение 16.43. Пусть $\varphi\colon M_1 \to M_2$ — морфизм накрытий пространства M. Рассмотрим подмножество $\Gamma_\varphi \subset M_1 \times_M M_2$, состоящее из всех пар вида $(x, \varphi(x))$. Это подмножество называется *графиком* морфизма M.

Замечание 16.44. Проекция графика Γ_φ на M_1 — гомеоморфизм (докажите это). Поэтому Γ_φ — накрытие пространства M. Поскольку локально по M график Γ_φ — объединение нескольких копий M, он открыто-замкнут в $M_1 \times_M M_2$.

Пусть $\widetilde{M} \to M$ — накрытие. Чтоб подчеркнуть аналогию с теорией Галуа, мы будем обозначать его $[\widetilde{M} : M]$.

Определение 16.45. Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие. Оно называется *связным*, если M и $\widetilde{M}$ связны и локально связны.

Утверждение 16.46. *Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие, причем M связно и локально связно. Тогда $\widetilde{M}$ является несвязным объединением своих компонент связности $\widetilde{M}_i$. Более того, каждая из компонент $\widetilde{M}_i$ является связным накрытием над M.*

Доказательство. Поскольку M локально связно, а $\widetilde{M}$ локально гомеоморфно M, оно тоже локально связно. Поэтому любая связная компонента пространства $\widetilde{M}$ открыта (докажите это). Значит, $\widetilde{M}$ — несвязное объединение своих компонент связности. Пусть теперь $U \subset M$ — связное открытое подмножество, над которым $\widetilde{M}$ расщепляется. Тогда $\pi^{-1}(U)$ — несвязное объединение нескольких копий U. Каждая из этих копий целиком лежит в одной из связных компонент $\widetilde{M}_i$, следовательно, $\widetilde{M}_i \cap \pi^{-1}(U)$ тоже несвязное объединение копий U. Поэтому $\widetilde{M}_i$ — накрытие. □

Следствие 16.47. *Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — связное накрытие. Тогда график любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}or(\widetilde{M}, \widetilde{M})$ — связная компонента в $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$. Связная компонента $\widetilde{M}' \subset \widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$ является графиком морфизма $\varphi \in \mathcal{M}or(\widetilde{M}, \widetilde{M})$ тогда и только тогда, когда проекция $\widetilde{M}'$ на первую компоненту задает изоморфизм $\widetilde{M}' \to \widetilde{M}$.*

Доказательство. Если $\widetilde{M}'$ — график, то он открыто-замкнут в $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$ (это локальное утверждение, а локально $\widetilde{M}'$ — объединение нескольких компонент пространства $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$). Поэтому он является связной компонентой.

Обратное тоже верно, так как любая связная компонента является накрытием, а если $\widetilde{M}'$ гомеоморфно проектируется на $\widetilde{M}$, то проекция на вторую компоненту задает морфизм накрытий из $\widetilde{M} \cong \widetilde{M}'$ на $\widetilde{M}$. По построению $\widetilde{M}'$ является графиком этого морфизма. □

Замечание 16.48. Пусть $[\widetilde{M}:M]$ — связное накрытие. Рассмотрим $\widetilde{M}\times_M\widetilde{M}$ как накрытие над $\widetilde{M}$ относительно проекции на первую компоненту. Тогда

$$\mathscr{M}or_{\widetilde{M}}(\widetilde{M},\widetilde{M}\times_M\widetilde{M})=\mathscr{M}or_M(\widetilde{M},\widetilde{M}).$$

В самом деле, морфизмы $\mathscr{M}or_{\widetilde{M}}(\widetilde{M},\widetilde{M}\times_M\widetilde{M})$ взаимно однозначно соответствуют компонентам пространства $\widetilde{M}\times_M\widetilde{M}$, которые изоморфно проектируются на $\widetilde{M}$, но в силу предыдущего следствия это то же самое, что морфизмы из $\widetilde{M}$ в себя.

16.7. Накрытия Галуа и группа Галуа

Определение 16.49. Пусть $[\widetilde{M}:M]$ — связное накрытие. Оно называется *накрытием Галуа*, если накрытие $\widetilde{M}\times_M\widetilde{M}\to\widetilde{M}$ расщепляется.

Замечание 16.50. Отметим, что

$$\mathscr{M}or_{\widetilde{M}}(\widetilde{M},\widetilde{M}\times_M\widetilde{M})=\mathscr{M}or_M(\widetilde{M},\widetilde{M})$$

(замечание 16.48). Поэтому $[\widetilde{M}:M]$ является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда каждая пара $(x,y)\in\widetilde{M}\times_M\widetilde{M}$ принадлежит графику морфизма ν. Из соображений симметрии график Γ_ν проектируется изоморфно на оба сомножителя $\widetilde{M}$, значит, ν — изоморфизм.

Из этого замечания сразу вытекает следующее полезное утверждение.

Утверждение 16.51. *Пусть $\pi:\widetilde{M}\to M$ — связное накрытие. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $[\widetilde{M}:M]$ *— накрытие Галуа;*

2) *для любых точек $x,y\in\widetilde{M}$, удовлетворяющих условию $\pi(x)=$ $=\pi(y)$, существует автоморфизм пространства $\widetilde{M}$, переводящий x в y.* □

Определение 16.52. Пусть G — группа, действующая на множестве M. Действие группы называется *свободным*, если для любого неединичного $g\in G$ и любого $m\in M$ выполняется равенство $gm\neq$ $=m$. Действие группы называется *транзитивным*, если M состоит из одной орбиты.

Замечание 16.53. Пусть $[\widetilde{M}:M]$ — связное накрытие. Обозначим через $\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]$ группу автоморфизмов $\widetilde{M}$ над M. Тогда

$\operatorname{Aut}[\widetilde{M} : M]$ свободно действует на M. Действительно, пусть $g \in$ $\in \operatorname{Aut}[\widetilde{M} : M]$ — элемент, сохраняющий $x \in M$. Тогда график Γ_g пересекается с графиком тождественного отображения Γ_{Id}. Но поскольку график автоморфизма является связной компонентой в $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$, они совпадают: $\Gamma_g = \Gamma_{\mathrm{Id}}$.

Напомним, что *слоем* накрытия $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ называется множество $\pi^{-1}(x)$, где $x \in M$.

Следующее утверждение немедленно получается из утверждения 16.51 (проверьте это).

Утверждение 16.54. *Связное накрытие* $[\widetilde{M} : M]$ *является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда действие* $\operatorname{Aut}[\widetilde{M} : M]$ *на любом его слое транзитивно.* □

Определение 16.55. Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие Галуа. Тогда группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}[\widetilde{M} : M]$ называется *группой Галуа накрытия*.

Замечание 16.56. Пусть задано свободное, вполне разрывное действие группы G на связном, локально связном топологическом пространстве $\widetilde{M}$. Тогда $[\widetilde{M} : \widetilde{M}/G]$ — накрытие Галуа. Обратное тоже верно: любое накрытие Галуа имеет вид $[\widetilde{M} : \widetilde{M}/G]$, где G — группа Галуа $[\widetilde{M} : M]$ (докажите это).

16.8. Теория Галуа для накрытий

Следующая лемма вполне очевидна (докажите ее).

Лемма 16.57. *Пусть* $W_1 \to W_2 \to W_3$ — *накрытия, причем* $W_1 \to$ $\to W_2$ *инъективно, а* $[W_2 : W_3]$ *расщепляется. Тогда* $[W_1 : W_3]$ *тоже расщепляется.*

Утверждение 16.58. *Пусть* $M_1 \to M_2 \to M_3$ — *накрытия, причем* $[M_1 : M_3]$ — *накрытие Галуа. Тогда* $[M_1 : M_2]$ *тоже накрытие Галуа.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность накрытий

$$M_1 \times_{M_2} M_1 \to M_1 \times_{M_3} M_1 \to M_1.$$

Накрытие $M_1 \times_{M_3} M_1 \to M_1$ расщепляется, потому что $[M_1 : M_3]$ — накрытие Галуа, а естественное вложение $M_1 \times_{M_2} M_1 \to M_1 \times_{M_3} M_1$ инъективно по построению (проверьте). В силу предыдущей леммы из этого следует, что накрытие $M_1 \times_{M_2} M_1 \to M_1$ расщепляется. □

Замечание 16.59. Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие Галуа, и пусть $G =$ $= \operatorname{Aut}[\widetilde{M} : M]$ — его группа Галуа. Отметим, что G свободно, вполне разрывно действует на $\widetilde{M}$ (проверьте это), и поэтому для любой подгруппы $G' \subset G$ определено факторпространство $\widetilde{M}/G'$, которое тоже является накрытием.

Определение 16.60. Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — связное накрытие. Его *факторнакрытием* называется накрытие $[\widetilde{M}' : M]$, для которого сущетсвует сюръективный морфизм накрытий $\widetilde{M} \to \widetilde{M}'$.

Теорема 16.61 (основная теорема теории Галуа)**.** *Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие Галуа, $G = \mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ — его группа Галуа, а $G' \subset G$ — любая подгруппа. Тогда $\widetilde{M}/G'$ — накрытие над M. Более того, любое факторнакрытие накрытия $[\widetilde{M} : M]$ получается таким образом.*

Доказательство. Пусть $[\widetilde{M}' : M]$ — факторнакрытие накрытия $[\widetilde{M} : M]$. Тогда $\widetilde{M} \to \widetilde{M}' \to M$ — последовательность накрытий, причем $[\widetilde{M} : M]$ — накрытие Галуа, значит, $[\widetilde{M} : \widetilde{M}']$ — тоже накрытие Галуа (утверждение 16.58). Поэтому $\widetilde{M}' = \widetilde{M}/G'$, где G' — группа автоморфизмов $\widetilde{M}$ над $\widetilde{M}'$. Поскольку каждый такой автоморфизм является автоморфизмом $\widetilde{M}$ над M, G' — подгруппа $\mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$. Мы получили взаимно однозначное соответствие между факторнакрытиями и подгруппами группы Галуа. □

16.9. Универсальное накрытие

Определение 16.62. Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — связное накрытие. Оно называется *этальным универсальным накрытием*, если $\widetilde{M}$ этально односвязно.

Замечание 16.63. Универсальное накрытие является накрытием Галуа. Действительно, поскольку $\widetilde{M}$ этально односвязно, $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$ расщепляется над $\widetilde{M}$.

Замечание 16.64. Универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма. Действительно, пусть $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}'$ — два универсальных накрытия. Поскольку $\widetilde{M}$ и $\widetilde{M}'$ этально односвязны, любая связная компонента их произведения $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}'$ расщепляется над $\widetilde{M}$ и над $\widetilde{M}'$ и, значит, является графиком изоморфизма.

Определение 16.65. Локально связное топологическое пространство M называется *локально этально односвязным*, если у каждой точки есть связная и этально односвязная окрестность.

Определение 16.66. Пусть $\{\pi_\alpha : M_\alpha \to M\}$ — набор накрытий локально этально односвязного пространства M. Если все эти накрытия расщепляются, т. е. $M_\alpha = S_\alpha \times M$, то определим $\prod_M M_\alpha$ как $M \times \prod S_\alpha$. В общем случае возьмем в обыкновенном произведении

$\prod M_\alpha$ подмножество, состоящее из таких точек $\prod x_\alpha$, что $\pi_\alpha(s_\alpha) = x$, и введем на нем топологию, взяв в качестве базы открытые подмножества в $U \times \prod S_\alpha$, где $U \subset M$ — открытое множество, над которым все M_α расщепляются и имеют вид $\pi_\alpha^{-1}(U) = U \times S_\alpha$.

Замечание 16.67. Отметим, что произведение накрытий не является расслоенным произведением в смысле Тихонова. В самом деле, произведение конечных накрытий компактов не обязательно конечно, значит, может не быть компактом (приведите пример, когда произведение компактных накрытий некомпактно).

В доказательстве существования универсального накрытия нам понадобится следующая лемма.

Лемма 16.68. *Пусть $[\widetilde{M} : M]$ — связное накрытие. Тогда $\widetilde{M}$ — факторнакрытие накрытия Галуа.*

Доказательство. Мы будем строить накрытие Галуа $[M_G : M]$ как компоненту произведения $\prod_M M_\alpha$, где все M_α изоморфны $\widetilde{M}$.

Шаг 1. Пусть $M_G \times_{\widetilde{M}} \widetilde{M}$ расщепляется как накрытие M_G. Тогда M_G — накрытие Галуа. В самом деле, M_G — это компонента в $\prod_M M_\alpha$, но раз $M_G \times_{\widetilde{M}} \widetilde{M}$ расщепляется над M_G, то и $M_G \times_{\widetilde{M}} \prod_M M_\alpha$ расщепляется над M_G. Значит, $M_G \times_{\widetilde{M}} M_G$ расщепляется над M_G.

Шаг 2. Пусть $x_1 \in M_G$ — выбранная точка, а x — ее образ в M. Предположим, что для каждого $y \in \widetilde{M}$ в слое над x существует морфизм накрытий $\varphi \in \mathscr{M}or(M_G, \widetilde{M})$, переводящий x_1 в y. Тогда слой проекции $M_G \times \widetilde{M} \to M_G$ содержится в объединении графиков всех морфизмов $\mathscr{M}or_M(M_G, \widetilde{M})$. Поэтому объединение всех таких графиков равно $M_G \times_{\widetilde{M}} \widetilde{M}$, а значит, $M_G \times_{\widetilde{M}} \widetilde{M}$ расщепляется над M_G.

Шаг 3. Возьмем произведение

$$\prod_M M_\alpha, \quad \alpha \in F_x,$$

проиндексированное всеми точками слоя F_x над x, и пусть M_G — компонента, содержащая точку $x_1 = \prod_{y \in F_x} y$. Обозначим через π_y проекцию $\prod_M M_\alpha$ на компоненту, соответствующую $y \in F_x$. Тогда $\pi_y(x_1) = y$. Следовательно, для любой точки $y \in \widetilde{M}$ в слое над x существует морфизм накрытий, переводящий x_1 в y. В силу шага 2 из этого следует, что $M_G \times_{\widetilde{M}} \widetilde{M}$ расщепляется над M_G, а в силу шага 1 — что M_G — накрытие Галуа. □

Универсальное накрытие пространства M строится как произведение накрытий Галуа $\prod_M M_\alpha$, где M_α пробегает все классы изоморфизма накрытий Галуа. Чтоб это произведение имело смысл, нужно сначала убедиться, что классы изоморфизма накрытий Галуа M образуют множество. Связное накрытие $[\widetilde{M}:M]$ задается набором множеств $\mathfrak{S}=\{U_\beta\subset M\}$, над которыми $\widetilde{M}$ расщепляется, имея вид $U_\beta\times S_\beta$, и изоморфизмов $S_\beta\cong S_\gamma$ для любых пересекающихся множеств $U_\beta, U_\gamma\in\mathfrak{S}$. Поскольку $\widetilde{M}$ связно, группа, порожденная такими изоморфизмами, действует на S_β транзитивно. Поэтому мощность множества S_β не может быть больше $\mathbb{N}\times|\mathfrak{S}|$ (проверьте), а значит, она не превосходит $\mathbb{N}\times 2^{|M|}$. Поскольку мощность множества классов изоморфизма накрытий Галуа ограничена мощностью множества всех топологий на $S_\beta\times M$, эта мощность не больше $2^{2^{|M|\times\mathbb{N}\times 2^{|M|}}}$ (проверьте это). А коль скоро эта мощность ограничена, классы изоморфизма накрытий Галуа пространства M образуют множество.

Теорема 16.69. *Пусть M — связное и локально этально односвязное топологическое пространство, а M_G — связная компонента в $\prod_M M_\alpha$, где M_α пробегает все классы изоморфизма накрытий Галуа пространства M. Тогда M_G — универсальное накрытие пространства M.*

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть $[M_1:M]$ — накрытие Галуа, а M'_G — произведение накрытий Галуа пространства M по всем классам изоморфизма накрытий, кроме M_1. Тогда

$$\prod_M M_\alpha\times_M M_1 = M'_G\times_M M_1\times_M M_1.$$

Поскольку $M_1\times_M M_1$ — несвязная сумма нескольких копий M_1, $\prod_M M_\alpha\times_M M_1$ — несвязная сумма нескольких копий $\prod_M M_\alpha$. Следовательно, $\prod_M M_\alpha\times_M M_1$ расщепляется над каждой связной компонентой $\prod_M M_\alpha$, а значит, накрытие

$$M_G\times_M M_1\to M_G$$

тоже расщепляется. Для любого накрытия $[M_1:M_G]$ произведение $M_G\times_{M_G} M_1$ является поднакрытием (образом вложения накрытий) в $M_G\times_M M_1$:

$$M_G\times_{M_G} M_1\hookrightarrow M_G\times_M M_1,$$

значит, оно тоже расщепляется. Поэтому любое накрытие Галуа над M_1 расщепляется над M_G.

Шаг 2. Пусть M_2 — любое накрытие над M_G (не обязательно накрытие Галуа). В силу предудущей леммы M_2 является факторнакрытием накрытия Галуа $[M_1 : M_G]$, которое расщепляется. Поэтому M_2 тоже расщепляется (докажите). $\square$

16.10. Этальная фундаментальная группа

Пусть M локально линейно связно, $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрытие, а $x \in M$. Для каждого пути $\gamma \in \Omega(M, x)$ рассмотрим поднятие $\tilde{\gamma}$ в $\widetilde{M}$. Поскольку $\mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ действует транзитивно на $\pi^{-1}(x)$, группа $\mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ действует транзитивно на множестве поднятий пути γ. Рассмотрим элемент $g_\gamma \in \mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$, который переводит $\tilde{\gamma}(0)$ в $\tilde{\gamma}(1)$. Поскольку действие $\mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ транзитивно на множестве поднятий пути γ, элемент g_γ не зависит от выбора поднятия. Мы построили отображение $\pi_1(M, x) \to \mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$.

Пусть $\gamma, \gamma' \in \Omega(M, x)$ — пути, а $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$ — их поднятия, причем $\tilde{\gamma}$ соединяет y_1 и y_2, а $\tilde{\gamma}'$ соединяет y_2 и y_3. Очевидно, $\gamma\gamma'$ поднимается до пути, который соединяет y_1 и y_3. Поэтому построенное отображение $\pi_1(M, x) \to \mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ — гомоморфизм. Пусть $\pi_1(\widetilde{M}, y_1) = \{1\}$, тогда класс гомотопии пути $\gamma \in \Omega(M, x)$ однозначно задается вторым концом y_2 поднятия $\tilde{\gamma}$, если $\tilde{\gamma}(0) = y_1$. Поскольку $\mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ действует свободно и транзитивно на $\pi^{-1}(x)$, в такой ситуации $\pi_1(M, x) \to \mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ — биекция.

Определение 16.70. Пусть $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ — универсальное накрытие. Группа Галуа $\mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ называется *этальной фундаментальной группой пространства M*.

Замечание 16.71. Если выполнены условия утверждения 16.37, то $\pi_1(\widetilde{M}, y_1) = \{1\}$ и группа $\mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ равна $\pi_1(M, x)$. В этой ситуации этальная фундаментальная группа равна обычной.

В силу основной теоремы теории Галуа накрытия $[M_1 : M]$ однозначно соответствуют подгруппам этальной фундаментальной группы.

Задача 16.5. Убедитесь, что накрытие $[M_1 : M]$ является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда соответствующая ему подгруппа $\mathrm{Aut}[\widetilde{M} : M]$ нормальна.

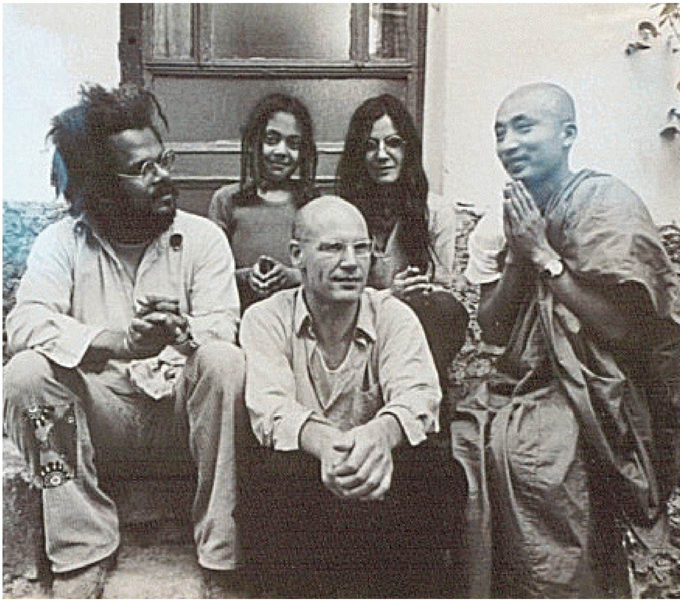
16.11. История, замечания

Фундаментальная группа впервые появилась в диссертации Римана в 1851 г.. Риман интересовался продолжением голоморфных (комплексно дифференцируемых) функций в комплексной области. Риман обнаружил, что голоморфная функция однозначно продолжается вдоль любого пути, который не пересекается с множеством ее особых точек, но это продолжение может зависеть от выбора пути. Заменив комплексную область на ее накрытие, можно добиться того, чтобы продолжение функции было однозначно. Таким образом в математике появились римановы поверхности (многообразия вещественной размерности 2), накрытия и фундаментальная группа.

Георг Фридрих Бернхард Риман
(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826—1866)

Начиная с 1860-х гг. топологию римановых поверхностей активно изучали Жордан, Мёбиус и многие другие математики. Фундаментальная группа была определена (как множество, и довольно неформально) Жорданом, а Пуанкаре в 1895 г. определил ее строго и одновременно обнаружил, что это группа.

Связь фундаментальной группы с накрытиями прослеживалась со времен Римана, но идея определить фундаментальную группу в терминах накрытий принадлежит Гротендику, который придумал, как строить топологические инварианты в алгебраической ситуации.



Александр Гротендик

Совместно с Мишелем Рейно Гротендик в 1961 г. опубликовал исследование «Revêtements étales et groupe fondamental» (SGA1), первое в серии SGA (Séminaire de géométrie algébrique), где исследовал фундаментальную группу алгебраических объектов в терминах накрытий. Оказалось, что если воспользоваться подходящим понятием накрытия, то можно определить этальную фундаментальную группу у огромного числа объектов алгебры и геометрии. Интересно, что в теории, развитой Гротендиком, частным случаем фундаментальной группы является группа Галуа алгебраического замыкания поля.

К сожалению, этими методами не удается алгебраически описать всю фундаментальную группу $\pi_1(X)$. Вместо этого получается «проконечная фундаментальная группа» $\hat{\pi}_1(X)$, которая определяется так. Проконечная группа есть компактная вполне несвязная хаусдорфова топологическая группа с базой топологии из открытых нормальных подгрупп с конечным фактором. Рассмотрим категорию всех гомоморфизмов $\varphi_G\colon \pi_1(X) \to G$, где G — проконечная группа, а образ $\pi_1(X)$ плотен в G. Морфизмы этой категории — непрерывные гомоморфизмы $\Psi: G_1 \to G_2$ из одной проконечной группы в другую, делающие следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\varphi_{G_1}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & G_1 \arrow[d, "\Psi"] \\ \pi_1(X) \arrow[r, "\varphi_{G_2}"] & G_2. \end{tikzcd}$$

Проконечное пополнение $\pi_1(X)$, оно же «проконечная фундаментальная группа» $\hat{\pi}_1(X)$ — начальный объект в этой категории. Это группа, которая хранит в себе всю информацию о конечных фактор-группах $\pi_1(X)$ и только о них; если у $\pi_1(X)$ нет конечных фактор-групп (это случается для некоторых экзотических и очень больших групп), проконечное пополнение $\pi_1(X)$ тривиально.

Простейшая ситуация, когда этот подход к фундаментальной группе применим на практике, такова. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}\backslash\{x_1, \ldots, x_n\}$ ($\mathbb{C}$ без конечного набора точек). Пусть $B \subset A$ — конечные подмножества $\mathbb{C}$. Легко видеть, что естественное отображение

$$\pi_1(\mathbb{C}\backslash A) \to \pi_1(\mathbb{C}\backslash B)$$

— наложение (докажите это). Рассмотрим предел $\hat{\pi}_1(\mathbb{C}\backslash A)$ по увеличивающимся конечным подмножествам $A \subset \mathbb{C}$. Получится группа, изоморфная группе Галуа алгебраического замыкания $\mathbb{C}(t)$. Доказать это нетрудно, если интерпретировать (вслед за Риманом) алгебраические расширения поля рациональных функций как накрытия над $\mathbb{C}\backslash\{x_1, \ldots, x_n\}$.

В аннотации к SGA1 говорится: «Этот текст излагает теорию фундаментальных групп в алгебраической геометрии с точки зрения Кронекера, позволяя определить фундаментальную группу одинаковым способом для алгебраического многообразия (в обычном смысле слова) и, например, для кольца целых чисел в числовом поле». Что именно имел в виду Гротендик, когда упоминал «теорию фундаментальных групп с точки зрения Кронекера», в SGA1 не уточняется.

Первые два тома SGA были перенабраны в LaTeX Французским математическим обществом и положены в arXiv.org: `http://arxiv.org/abs/math/0206203` (SGA1) и `http://arxiv.org/abs/math/0511279` (SGA2).

Более современное изложение теории этальных накрытий, этальных когомологий и этальной фундаментальной группы есть в книжке Дж. Милна «Этальные когомологии».

Все то же самое чрезвычайно доступно изложено в книге В. И. Данилова «Когомологии алгебраических многообразий» (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 35. М.: ВИНИТИ, 1989).

Лекция 17

СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ И ТЕОРЕМА ЗЕЙФЕРТА—ВАН КАМПЕНА

17.1. Фундаментальная группа и универсальное накрытие

Начнем с повтора той части материала прошлой лекции, который понадобится сейчас.

Накрытия пространства M образуют категорию. Объекты этой категории — накрытия, а морфизмы — отображения $\psi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}'$, коммутирующие с проекцией в M:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"] & \widetilde{M}' \arrow[d, "\pi'"] \\ & M. \end{tikzcd}$$

Пусть $\widetilde{M} \to M$ — накрытие, причем M и $\widetilde{M}$ связны, локально линейно связны и $\widetilde{M}$ односвязно, т. е. имеет тривиальную фундаментальную группу. Априори фундаментальная группа $\pi_1(\widetilde{M}, m)$ зависит от выбора точки m, но $\pi_1(\widetilde{M}, m_1)$ изоморфно $\pi_1(\widetilde{M}, m_2)$, если m_1 и m_2 лежат в одной компоненте линейной связности (это доказано на прошлой лекции).

Такое накрытие называется *универсальным*.

Поскольку $\widetilde{M}$ односвязно, оно является накрытием Галуа. В самом деле, пусть $\widetilde{M}' \xrightarrow{\pi} \widetilde{M}$ — связное накрытие, а $x \in \widetilde{M}$ — любая точка. Пространство $\widetilde{M}'$ локально линейно связно и линейно связно, а значит, связно. Пусть $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ — любые точки, а γ — путь, который их соединяет. Образ этого пути $\pi(\gamma)$ — петля в $\widetilde{M}$, идущая из x в x, но такая петля всегда стягиваема, поскольку $\pi_1(\widetilde{M}, x) = 0$. Путь γ является поднятием петли $\pi(\gamma)$, и коль скоро $\pi(\gamma)$ стягиваема, γ — тоже петля (это было доказано в предыдущей лекции). Поэтому $y_1 = y_2$ и $\pi^{-1}(x)$ состоит из одного элемента. Следовательно, $\widetilde{M}' \cong \widetilde{M}$, и все накрытия над $\widetilde{M}$ расщепляются.

Пусть M_1, M_2 — топологические пространства, снабженные непрерывными отображениями ψ_1, ψ_2 в M. Напомним, что *рассло-*

енным произведением M_1 на M_2 над M называется подмножество $M_1 \times_M M_2$, состоящее из всех таких пар $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, что $\psi_1(m_1) = \psi_2(m_2)$. Мы рассматриваем $M_1 \times_M M_2$ как подмножество в $M_1 \times M_2$ с индуцированной топологией.

Обозначим через $\Psi\colon M_1 \times M_2 \to M \times M$ отображение

$$\Psi(m_1, m_2) = (\psi_1(m_1), \psi_2(m_2)).$$

Легко видеть, что $M_1 \times_M M_2 = \Psi^{-1}(\Delta)$, где $\Delta \subset M \times M$ — диагональ. Поэтому для хаусдорфова пространства M расслоенное произведение — замкнутое подмножество в $M_1 \times M_2$.

На предыдущей лекции было доказано, что произведение накрытий — снова накрытие.

Вернемся к универсальному накрытию $\widetilde{M} \to M$. Любое накрытие над $\widetilde{M}$ расщепляется. Рассмотрим $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$ как накрытие над $\widetilde{M}$ с проекцией $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M} \to \widetilde{M}$, переводящей (m_1, m_2) в m_1.

Напомним, что накрытие называется *накрытием Галуа*, если $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ расщепляется. В силу односвязности $\widetilde{M}$ накрытие $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$ расщепляется, и $\widetilde{M}$ — накрытие Галуа.

Поскольку $\widetilde{M}$ локально связно, любое его накрытие локально связно. Локально связное пространство состоит из несвязного объединения своих компонент связности. Поскольку все компоненты связности $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$ являются связными накрытиями над $\widetilde{M}$, они ему изоморфны.

Мы получили, что проекция в $\widetilde{M}$ каждой из компонент связности в $\widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$ — гомеоморфизм, как по первому аргументу, так и по второму. Следовательно, каждая из этих компонент является графиком автоморфизма накрытия $\widetilde{M}$ над M. Действительно, пусть X — такая компонента, тогда проекции на первый и второй аргумент $\sigma_1, \sigma_2\colon X \to \widetilde{M}$ — это гомеоморфизмы, а X — график гомеоморфизма $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$ (проверьте это).

Из сказанного следует, что каждая точка $(x, y) \in \widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$ принадлежит графику автоморфизма $\psi \in \operatorname{Aut}[\widetilde{M} : M]$, где $\operatorname{Aut}[\widetilde{M} : M]$ — группа автоморфизмов накрытия $\widetilde{M}$ над M (она еще называется *группой Галуа накрытия* $\widetilde{M}$).

Обозначим проекцию $\widetilde{M} \to M$ через π. Для каждого $m \in M$ и любой пары точек $x, y \in \pi^{-1}(m)$ найдется автоморфизм ν, графику которого Γ_ν принадлежит точка $(x, y) \in \widetilde{M} \times_M \widetilde{M}$. В силу того что ν переводит $x \in \widetilde{M}$ в $\sigma_2(\sigma_1^{-1}(x, y))$, имеем $\nu(x) = y$ (проверьте это).

Мы получили, что $\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]$ транзитивно действует на множестве $\pi^{-1}(m)$. Поскольку $\widetilde{M}\times_M\widetilde{M}$ — объединение непересекающихся графиков морфизмов, из равенства $\nu_1(x)=\nu_2(y)$ следует, что $\nu_1=$ $=\nu_2$. Поэтому $G:=\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]$ действует на $\pi^{-1}(m)$ транзитивно и свободно. Значит, $M=\widetilde{M}/G$, причем действие G на $\widetilde{M}$ свободно.

Пусть $g\in\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]$ — элемент группы Галуа универсального накрытия, переводящий $x\in\widetilde{M}$ в $g(x)$, где $x\in\pi^{-1}(m)$. Рассмотрим путь γ, соединяющий x и $g(x)$. Такой путь единственный с точностью до гомотопии, поскольку $\widetilde{M}$ односвязно (докажите это). Образ $\gamma\circ\pi\colon[0,1]\to M$ — это петля. Обозначим ее класс в $\pi_1(M,m)$ через γ_g. Поскольку путь γ единственный с точностью до гомотопии, γ_g зависит только от x и g. Но коль скоро $\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]$ действует на $\pi^{-1}(m)$ транзитивно, эта группа переводит путь, соединяющий x и $g(x)$, в путь, соединяющий y и $g(y)$, где в качестве y можно взять любую точку в $\pi^{-1}(m)$. Следовательно, $\gamma_g\in\pi_1(M,m)$ не зависит от выбора x и однозначно определяется автоморфизмом $g\in$ $\in\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]$. Мы получили отображение $\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]\to\pi_1(M,m)$.

Если $g_1,g_2\in\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]$, причем g_1 переводит x в y, а g_2 переводит y в z, то g_1g_2 переводит x в z. Произведение путей $\gamma_{g_1}\gamma_{g_2}$ получается как $\pi(\gamma\gamma')$, где γ — путь из x в y, а γ' — путь из y в z. Следовательно, $\gamma_{g_1}\gamma_{g_2}=\gamma_{g_1g_2}$, и построенное выше отображение $\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]\to\pi_1(M,m)$ — гомоморфизм групп.

В прошлой лекции мы убедились, что это изоморфизм (проверьте). Мы получили следующую теорему.

Теорема 17.1. *Пусть $\widetilde{M}\to M$ — универсальное накрытие, причем M и $\widetilde{M}$ связны, локально линейно связны и $\widetilde{M}$ односвязно. Рассмотрим группу Галуа этого накрытия $G=\mathrm{Aut}[\widetilde{M}:M]$. Тогда $M=\widetilde{M}/G$, причем фундаментальная группа пространства M изоморфна G.* □

Замечание 17.2. Эта теорема позволяет вычислить $\pi_1(M,m)$ для пространств, полученных как фактор $\widetilde{M}/G$ односвязного пространства $\widetilde{M}$ по группе G, действующей на $\widetilde{M}$ свободно и вполне разрывно. Мы немедленно получаем, что фундаментальная группа окружности S^1 равна $\mathbb{Z}$. Действительно, $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, но $\pi_1(\mathbb{R})=\{1\}$, так как $\mathbb{R}$ стягиваемо. Аналогичное рассуждение показывает, что $\pi_1(T^n)=\mathbb{Z}^n$, где $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ — n-мерный тор.

Замечание 17.3. Пусть $\widetilde{M}_1\to M_1$, $\widetilde{M}_2\to M_2$ — универсальные накрытия, $\pi_1(M_i)=G_i$. Поскольку $\widetilde{M}_1\times\widetilde{M}_2$ односвязно (проверьте это) и накрывает $M_1 \times M_2$ (проверьте), оно является универсальным накрытием пространства $M_1 \times M_2$. Поэтому $(\widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2)/(G_1 \times G_2) = M_1 \times M_2$ и $\pi_1(M_1 \times M_2) = G_1 \times G_2$. Мы получили, что фундаментальная группа произведения двух пространств — это произведение фундаментальных групп этих пространств.

Замечание 17.4. Этот факт можно получить и не пользуясь накрытиями: непрерывное отображение из любого пространства X в $M_1 \times M_2$ — пара отображений из X в M_1 и из X в M_2. Поэтому то же самое верно для петель и для классов гомотопий петель.

17.2. Категория накрытий и фундаментальная группа

Пусть G — группа, а $\mathscr{Rep}(G, \mathscr{Sets})$ — категория, объекты которой — множества с действием G, а морфизмы — отображения множеств, совместимые с действием G. Эта категория называется *категорией множеств с действием G*.

Предположим, что $G = \operatorname{Aut}[\widetilde{M} : M]$, где $[\widetilde{M} : M]$ — универсальное накрытие пространства M. Для каждого множества S с действием G рассмотрим произведение $\widetilde{M} \times S$, где G действует по формуле $g(m, s) = (g(m), g(s))$ (такое действие называется *диагональным*). Взяв дискретную топологию на S, можно считать, что $\widetilde{M} \times S$ — топологическое пространство. Поскольку действие G на $\widetilde{M} \times S$ вполне разрывно (проверьте это), фактор $(\widetilde{M} \times S)/G$ — хаусдорфово топологическое пространство.

Замечание 17.5. Легко видеть, что $(\widetilde{M} \times S)/G$ является накрытием пространства M. В самом деле, локально по M пространство $\widetilde{M}$ является тривиальным накрытием, изоморфным $M \times G$, где G рассматривается как топологическое пространство с дискретной топологией. В таком случае $(\widetilde{M} \times S)/G$ изоморфно $M \times X$, следовательно, стандартная проекция $\pi_X : (\widetilde{M} \times S)/G \to M$ — накрытие. Для каждой точки $m \in M$ множество $\pi_x^{-1}(m)$ снабжено биекцией на $(G \times X)/G = X$.

Теорема 17.6. *Пусть $\widetilde{M} \to M$ — универсальное накрытие, а G — его группа Галуа, $G = \operatorname{Aut}[\widetilde{M} : M]$. Рассмотрим функтор*

$$\Psi\colon\ \mathscr{Rep}(G, \mathscr{Sets}) \to \mathscr{Cov}(M)$$

из $\mathscr{Rep}(G, \mathscr{Sets})$ в категорию $\mathscr{Cov}(M)$ накрытий пространства M, построенный выше. Тогда Ψ — эквивалентность категорий.

Доказательство. Возьмем точку $m\in M$. Обратный функтор

$$\mathscr{C}ov(M) \to \mathscr{R}ep(G, \mathscr{S}ets)$$

строится весьма просто. Пусть $\sigma: M' \to M$ — накрытие пространства M, а $S_{M'} := \sigma^{-1}(m)$ — его слой над m. На множестве $S_{M'}$ задано действие $\pi_1(M)$ следующим образом. Пусть $x \in S_{M'}$ — любая точка, а $g \in G$ — элемент фундаментальной группы. Возьмем петлю $\gamma_g \in \Omega(M, m)$, представляющую g, и пусть $\tilde{\gamma}_g$ — ее поднятие в m' с начальной точкой x. Такое поднятие существует и единственно, как доказано в предыдущей лекции, и конечная точка $\tilde{\gamma}_g(1)$ однозначно определяется точкой x и элементом g. Таким образом, каждое $g\in G$ задает отображение из $S_{M'}$ в $S_{M'}$ Легко видеть, что произведение двух петель соответствует композиции отображений, значит, $x \to \tilde{\gamma}_g(1)$ задает действие G на $S_{M'}$. При морфизме накрытий поднятия путей переходят в поднятия путей, следовательно, $M' \to S_{M'}$ задает функтор $\Phi: \mathscr{C}ov(M) \to \mathscr{R}ep(G, \mathscr{S}ets)$.

Композиция $\Psi \circ \Phi$ переводит множество с действием G в то же самое множество, что ясно из определения.

Чтобы убедиться, что композиция $\Phi \circ \Psi$ переводит накрытие в эквивалентное ему, достаточно проверить это на связных накрытиях. Но связные накрытия имеют вид $\widetilde{M}/G'$ для подгрупп $G' \subset G$ (это утверждение называется основной теоремой теории Галуа для накрытий, и оно доказано в прошлой лекции). Применение функтора Φ к M/G' дает, очевидно, множество $\Phi(\widetilde{M}/G') = G/G'$ с естественным действием G. По построению

$$\Psi(G/G') = (\widetilde{M} \times G/G')/G = \widetilde{M}/G'$$

(проверьте это). Значит, функтор $\Phi \circ \Psi$ изоморфен тождественному. $\square$

Замечание 17.7. Каждое накрытие изоморфно факторнакрытию несвязной суммы нескольких копий универсального:

$$M' = \bigsqcup_i \widetilde{M}/G_i;$$

в соответствие такому накрытию можно поставить множество

$$S = \bigsqcup_i G/G_i$$

с естественным действием G. Это задает эквивалентность категории накрытий и категории множеств с действием G чуть более явно. Докажите самостоятельно, что это та же самая эквивалентность категорий, что была построена выше.

17.3. Как восстановить фундаментальную группу по категории накрытий

Замечание 17.8. Пусть G — группа, а $\mathscr{C} = \mathscr{R}ep(G, \mathscr{S}ets)$ — категория множеств с действием G. Рассмотрим G как объект категории $\mathscr{C}$, т. е. множество с действием G, определенным формулой $(g, x) \to \to gx$. Тогда все морфизмы из G в себя обратимы и группа $\mathrm{Aut}(G) = = \mathscr{M}or(G, G)$ изоморфна G. В самом деле, пусть $\nu \in \mathscr{M}or(G, G)$ переводит 1 в x. Тогда $\nu(g1) = g(\nu(x)) = gx$. Такой морфизм, очевидно, биективен, а композиция $\nu_x \nu_y$ равна ν_{xy}.

Лемма 17.9. *Пусть $\overline{G} \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ — объект категории $\mathscr{R}ep(G, \mathscr{S}ets)$, который обладает следующими свойствами:*

1) *все морфизмы из $\overline{G}$ в себя являются изоморфизмами;*

2) *для любого $X \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ множество $\mathscr{M}or(\overline{G}, X)$ непусто.*

Тогда $\overline{G}$ изоморфен G как объект категории $\mathscr{C}$.

Доказательство. *Шаг 1.* Все объекты категории $\mathscr{C}$ получены объединением непересекающихся орбит действия группы G. Каждая такая орбита имеет вид G/G', где G' — стабилизатор точки. Нетривиальные морфизмы из орбиты G/G_1 в G/G_2 возможны, только если $G_2 \supset G_1$ (проверьте это).

Шаг 2. Поскольку $\mathscr{M}or(\overline{G}, X)$ всегда непусто, $\overline{G}$ — объединение орбит вида G/G_i, среди которых хотя бы одна изоморфна G.

Шаг 3. Пусть $\overline{G}$ содержит две орбиты X_1, X_2, причем X_1 изоморфна G. Рассмотрим морфизм из $\overline{G}$ в себя, тождественный на всех орбитах, кроме X_1, и отображающий X_1 в $X_2 = G/G'$ (такой морфизм существует в силу шага 1). Такой морфизм не биективен, значит, он не может быть изоморфизмом.

Шаг 4. Мы получили, что $\overline{G}$ состоит из одной орбиты (шаг 3), причем эта орбита изоморфна G (шаг 2). Это доказывает, что $\overline{G}$ изоморфно G. □

Замечание 17.10. Из доказанной выше леммы следует, что группа G однозначно восстанавливается по категории $\mathscr{R}ep(G, \mathscr{S}ets)$: если категории $\mathscr{R}ep(G_1, \mathscr{S}ets)$, $\mathscr{R}ep(G_2, \mathscr{S}ets)$ эквивалентны, то группы G_1, G_2 изоморфны.

17.4. Свободная группа и свободное произведение групп

Пусть G, H — группы. Рассмотрим множество $\overline{G*H}$, состоящее из последовательностей (слов) вида $g_1h_1g_2h_2\dots g_nh_n$, где $g_i \in G$, $h_i \in H$. Рассмотрим отношение эквивалентности, порожденное соотношениями

$$g_1h_1g_2h_2\dots g_ih_ig_{i+1}h_{i+1}\dots g_nh_n \sim g_1h_1g_2h_2\dots g_ig_{i+1}h_{i+1}\dots g_nh_n, \tag{17.4.1}$$

если $h_i = 1$, и

$$g_1h_1g_2h_2\dots g_ih_ig_{i+1}h_{i+1}\dots g_nh_n \sim g_1h_1g_2h_2\dots g_ih_ih_{i+1}g_{i+2}\dots g_nh_n, \tag{17.4.2}$$

если $g_{i+1} = 1$. Иными словами, в каждом слове все сочетания вида $g_1 1 g_2$ можно заменить на g_1g_2, а $h_1 1 h_2$ на h_1h_2. Множество классов эквивалентности обозначается $G*H$. Слова можно умножать:

$$g_1h_1g_2h_2\dots g_nh_n \cdot g_1'h_1'g_2'h_2'\dots g_{n'}'h_{n'}' := g_1h_1g_2h_2\dots g_nh_ng_1'h_1'g_2'h_2'\dots g_{n'}'h_{n'}'.$$

Такое умножение, очевидно, ассоциативно. Из соотношений (17.4.1) и (17.4.2) немедленно следует, что

$$g_1h_1g_2h_2\dots g_nh_nh_n^{-1}g_n^{-1}\dots h_2^{-1}g_2^{-1}h_1^{-1}g_1^{-1} = 1,$$

значит, $G*H$ — это группа.

Определение 17.11. Группа $G*H$ называется *свободным произведением*, или *амальгамой*, или *копроизведением* групп G и H.

Задача 17.1. Проверьте, что это произведение ассоциативно:

$$(F*G)*H = F*(G*H).$$

Замечание 17.12. Аналогичным образом определяется свободное произведение произвольного набора групп $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in I$. Пусть множество $\overline{\coprod_\alpha G_\alpha}$ состоит из слов вида $g_1g_2g_3\dots g_n$, составленных из букв $g_i \in G_{\alpha_i}$. Рассмотрим отношение эквивалентности, порожденное соотношениями

$$g_1g_2\cdots g_ig_{i+1}g_{i+2}\cdots g_n \sim g_1g_2\cdots g_ig_{i+2}\cdots g_n,$$

если $g_{i+1} = 1$ (можно выкинуть из слова букву g_{i+1}, если g_{i+1} равно 1), и

$$g_1g_2\cdots g_{i-1}g_ig_{i+1}g_{i+2}\cdots g_n \sim g_1g_2\cdots g_{i-1}(g_ig_{i+1})g_{i+2}\cdots g_n,$$

если $g_i, g_{i+1} \in G_\alpha$ (можно сгруппировать последовательно идущие буквы g_i, g_{i+1} в $(g_i g_{i+1})$, если они обе принадлежат одной и той же группе G_α). Произведение и обратный элемент в

$$\coprod_\alpha G_\alpha := \overline{\coprod_\alpha G_\alpha}/\sim$$

определяются теми же самыми формулами, что и для $G * H$; аналогичное рассуждение показывает, что это группа (докажите это). Проверьте, что это определение для двух сомножителей дает $G * H$.

Определение 17.13. Определенная таким образом группа $\coprod_\alpha G_\alpha$ называется *свободным произведением*, или *амальгамой*, или *копроизведением* набора $\{G_\alpha\}$.

Определение 17.14. Копроизведение $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}$ (n раз) называется *свободной группой от n образующих*. Копроизведение вида $\coprod_\alpha G_\alpha$, где все $G_\alpha \cong \mathbb{Z}$, называется *свободной группой*.

Замечание 17.15. Легко видеть, что естественное отображение любого сомножителя в свободное произведение $G_0 \to \coprod_\alpha G_\alpha$, $g_0 \to \to g_0$, является вложением (докажите это).

17.5. Представимые функторы

Пусть $\mathscr{C}$ — категория, а $A \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ — некоторый объект. Определим hom-*функтор* $h_A\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}ets$ формулой $h_A(X) = \mathscr{M}or(A, X)$.

Пусть $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}ets$ — функтор из $\mathscr{C}$ в множества. Напомним, что функтор F называется *представимым*, если он изоморфен hom-функтору h_A для какого-то объекта $A \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$. В этой ситуации A называется *представляющим объектом* для функтора F.

Определение 17.16. Пусть $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ — категории, а $F_1, F_2\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ — функторы из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}'$. *Естественное преобразование функторов* $\Phi\colon F_1 \to F_2$ задается так. Для каждого $X \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ задан морфизм

$$\Phi_X \in \mathscr{M}or(F_1(X), F_2(X))$$

таким образом, что следующая диаграмма коммутативна для любого $\lambda \in \mathscr{M}or(X, Y)$:

$$\begin{tikzcd}
F_1(X) \arrow[r, "F_1(\lambda)"] \arrow[d, "\Phi_X"'] & F_1(Y)V \arrow[d, "\Phi_Y"] \\
F_2(X) \arrow[r, "F_2(\lambda)"] & F_2(Y).
\end{tikzcd}$$

Отметим, что частным случаем естественного преобразования функторов является изоморфизм функторов, определенный в лекции 14.

Естественное преобразование функторов из $\mathscr{C}$ в множества $\Phi\colon h_A \to F$ однозначно определяется элементом $\Phi(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$. Это можно видеть из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M}or(A, A) \arrow[r, "f \to f \circ \lambda"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & \mathscr{M}or(A, B)V \arrow[d, "\Phi_B"] \\
F(A) \arrow[r, "F(\lambda)"] & F(B),
\end{tikzcd}$$

где $\lambda \in \mathscr{M}or(A, B)$ — любой морфизм. Верхняя стрелка переводит Id_A в λ. Из коммутативности этой диаграммы получаем, что

$$\Phi_B(\lambda) = F(\lambda)(\Phi_A(\mathrm{Id}_A)),$$

значит, отображение $\Phi_B\colon \mathscr{M}or(A, B) \to F(B)$ целиком определяется элементом $\Phi_A(\mathrm{Id}_A) \in \mathscr{M}or(A, A)$. Мы получили следующую полезную лемму.

Лемма 17.17 (лемма Ионеды, Yoneda lemma). *Пусть $\mathscr{C}$ — категория, $A \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ — ее объект, $h_A\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}ets$ — hom-функтор, а $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}ets$ — еще один функтор. Тогда множество естественных преобразований функтора h_A в F биективно с $F(A)$.* □

Функторы $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}ets$ сами образуют категорию: объекты этой категории — функторы $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}ets$, а морфизмы — естественные преобразования. Из леммы Ионеды немедленно следует, что $\mathscr{M}or(h_A, h_B) = \mathscr{M}or(B, A)$. Мы получили такое утверждение.

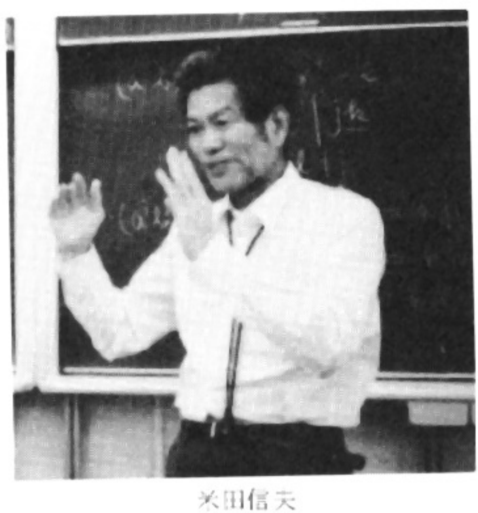
Утверждение 17.18. *Пусть $\mathscr{C}$ — категория, а $\mathscr{F}$ — категория представимых функторов $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}ets$ с морфизмами, которые задаются естественными преобразованиями функторов. Тогда контравариантный функтор $A \to h_A$ задает эквивалентность категорий $\mathscr{C} \to \mathscr{F}^\circ$.* □

Замечание 17.19. В частности, объект категории, представляющий заданный функтор, определяется этим функтором однозначно с точностью до изоморфизма.

Мы излагали лемму Ионеды и эквивалентность категорий для ковариантных функторов, но то же самое верно и для контравариантных функторов с заменой ковариантного функтора $h_A(X) = \mathscr{M}or(A, X)$ на контравариантный $h_A^\circ(X) = \mathscr{M}or(X, A)$.

17.6. Лемма Ионеды: история, замечания

Нобуо Ионеда был студентом Сёкити Иянаги (Shokichi Iyanaga, 1906—2006) в университете Токио. В начале 1950-х гг. Самуэль Эйленберг путешествовал по Японии, и Ионеда, будучи еще студентом, сопровождал его в качестве переводчика. Закончив университет, Ионеда отправился продолжать учебу к Эйленбергу в Принстон. В скором времени после этого Эйленберг уехал в Париж (он был участником группы Бурбаки), и в 1954 г. Ионеда поехал в Париж к Эйленбергу. В Париже Ионеда имел длинную беседу с Сондерсом Маклейном (сначала в кафе у Северного вокзала, а потом на вокзале; они закончили разговаривать в дверях отбывающего поезда). Под впечатлением от этой беседы Маклейн назвал лемму, которую он узнал от Ионеды на вокзале, леммой Ионеды.



Нобуо Ионеда (Nobuo Yoneda, 1930—1996)

Кроме знаменитой леммы, Ионеда придумал интерпретацию групп Ext в терминах расширений модулей, чем положил начало современной гомологической алгебре.

После возвращения в Японию Ионеда не занимался математикой. В начале 1960-х гг. он под влиянием Сёкити Иянаги заинтересовался компьютерными науками и стал одним из авторов языка

Алгол-68, а после создания факультета компьютерных наук в университете Токио стал там профессором.

Интересно, что лемма Ионеды сейчас входит в стандартный курс компьютерных наук, ибо на теории категорий в значительной степени построена теоретическая основа функционального программирования.

Помимо Ионеды, Иянага был наставником Горо Азумаи (изобретателя алгебр Азумаи), Кунихико Кодаиры (открывшего множество ключевых теорем алгебраической и комплексной геометрии), Кенкити Ивасавы (знаменитого автора разложения Ивасавы и важных теорем теории чисел) и Цунео Тамагавы, прославившегося «числами Тамагавы».

Иянага был учеником Тейдзи Такаги (1875—1960), который был студентом Давида Гильберта. Такаги написал десятки учебников, обеспечив Японию университетскими учебниками по всем разделам математики. Он занимался теорией чисел и в 1898 году придумал аксиоматическое определение поля.

17.7. Произведение и копроизведение в категории

Свободное произведение можно охарактеризовать следующим свойством.

Утверждение 17.20. *Пусть G, H — группы, $G * H$ — их свободное произведение, а $\iota\colon G \hookrightarrow G * H$, $\iota\colon H \hookrightarrow G * H$ — естественные вложения. Тогда каждая пара гомоморфизмов $\varphi\colon G \to P$, $\psi\colon H \to P$ в группу P продолжается до гомоморфизма $\varphi * \psi\colon G * H \to P$ таким образом, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, "\varphi"'] & & H \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[ddl, "\psi"] \\
& G * H \arrow[d, "\varphi*\psi"] & \\
& P &
\end{tikzcd}$$

Более того, гомоморфизм $\varphi * \psi$ определяется отображениями φ и ψ однозначно.

Доказательство. Пусть гомоморфизм $\varphi * \psi$ переводит слово вида $g_1 h_1 g_2 h_2 \ldots g_n h_n$ в $\varphi(g_1)\psi(h_1)\varphi(g_2)\psi(h_2)\ldots\varphi(g_n)\psi(h_n)$. Поскольку это отображение переводит эквивалентные слова в эквивалентные и произведение слов в произведение, оно является гомоморфизмом. Единственность такого $\varphi * \psi$ очевидна, потому что группа $G * H$ порождена образами G и H. □

Замечание 17.21. Утверждение 17.20 называется *универсальным свойством копроизведения*. Его можно взять в качестве определения $G * H$. Действительно, в силу универсального свойства $G * H$ является представляющим объектом для функтора $P \to \mathscr{M}or(G, P) \times \times \mathscr{M}or(H, P)$ из групп в множества, а такой объект единственный (замечание 17.19).

Замечание 17.22. Произведение и копроизведение можно определить на языке категорий: произведение объектов $A, B \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ — объект, представляющий функтор

$$X \to \mathscr{M}or(X, A) \times \mathscr{M}or(X, B),$$

а копроизведение объектов $A, B \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ — объект, представляющий функтор

$$X \to \mathscr{M}or(A, X) \times \mathscr{M}or(B, X).$$

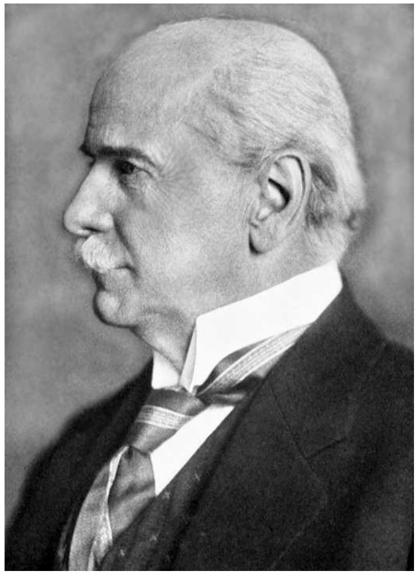
Аналогичным образом определяется произведение и копроизведение любого набора объектов. Произведение или копроизведение не всегда существует, но если оно существует, то определено однозначно с точностью до изоморфизма, что следует из леммы Ионеды (замечание 17.19).

Замечание 17.23. В большинстве известных категорий (группы, множества, топологические пространства, векторные пространства) определение произведения согласовано с категорным определением, приведенным выше (проверьте это).

Замечание 17.24. В категории топологических пространств копроизведение — это несвязная сумма, в категории множеств копроизведение — несвязное объединение, а в категории векторных пространств копроизведение — это прямая сумма пространств. Проверьте это.

17.8. История свободной группы и копроизведений

Свободную группу открыл немецкий математик Вальтер фон Дик, ученик Клейна. Фон Дик в 1882 г. первым дал современное определение группы и был автором топологической классификации неориентируемых римановых поверхностей (двумерных многообразий), которую он получил в 1888 г.



Вальтер Франц Антон фон Дик
(Walther Franz Anton von Dyck, 1856—1934)

Фон Дика интересовали фуксовы группы (дискретные подгруппы группы изометрий плоскости Лобачевского). В той же самой работе 1882 года, в которой он определил группы, фон Дик обратил внимание на то, что некоторые фуксовы группы являются в некотором смысле простейшими; это и были свободные группы. Еще фон Дик был создателем Немецкого музея науки и технологии и издал полное собрание писем Кеплера.

Название «свободная группа» принадлежит Якобу Нильсену (Jacob Nielsen), датскому математику, ученику Макса Дена (Max Dehn), в 1924 г. доказавшему, что любая подгруппа конечно порожденной свободной группы свободна.

Категорное определение свободного произведения как объекта, представляющего функтор

$$X \to \mathscr{M}or(A, X) \times \mathscr{M}or(B, X),$$

принадлежит Сондерсу Маклейну, который в работе «Groups, categories and duality» (1948) нашел категорные интерпретации множества понятий общей (универсальной) алгебры.

17.9. Теорема Зейферта—ван Кампена

Теорема 17.25 (теорема Зейферта—ван Кампена, Seifert—van Kampen Theorem). *Пусть $M = X \cup Y$ — объединение топологических пространств X и Y, причем X и Y локально связны, локально односвязны, замкнуты в M и связны, а $X \cap Y$ связно и односвязно. Тогда $\pi_1(M)$ изоморфно свободному произведению $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$.*

Доказательство. *Шаг 1.* Категория $\mathscr{R}ep(G * H, \mathscr{S}ets)$ эквивалентна категории $\mathscr{C}$ множеств, на которых задано действие G и H (априори никак не согласованное). Функтор из $\mathscr{R}ep(G * H, \mathscr{S}ets)$ в $\mathscr{C}$ переводит S в то же самое множество S, где действие G и H определяется из вложений $G \hookrightarrow G * H$, $H \hookrightarrow G * H$. Обратный функтор определяется из того, что для каждого множества I с действием G и H заданы гомоморфизмы $G, H \to \Sigma_I$, где Σ_I — группа биективных отображений из I в I. В силу универсального свойства $G * H$ такие гомоморфизмы однозначно продолжаются до гомоморфизма $G * H \to \Sigma_I$. Это задает функтор из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{R}ep(G * H, \mathscr{S}ets)$, очевидно, обратный исходному.

Шаг 2. В силу замечания 17.10 группа G однозначно задается своей категорией $\mathscr{R}ep(G, \mathscr{S}ets)$. Поэтому для изоморфизма $\pi_1(M) \cong \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ достаточно убедиться, что категория накрытий пространства M эквивалентна $\mathscr{R}ep(\pi_1(X) * \pi_1(Y), \mathscr{S}ets)$. В силу предыдущего шага эта категория эквивалентна категории $\mathscr{C}$ множеств с действием $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$. Таким образом, теорема Зейферта—ван Кампена будет доказана, если мы докажем, что категория $\mathscr{C}ov(M)$ накрытий пространства M эквивалентна $\mathscr{C}$.

Шаг 3. Функтор из $\mathscr{C}ov(M)$ в $\mathscr{C}$ построить весьма нетрудно. Пусть $\sigma : \widetilde{M} \to M$ — накрытие пространства M. Соответствующие накрытия

$$\widetilde{X} = \sigma^{-1}(X) \to X, \quad \widetilde{Y} = \sigma^{-1}(Y) \to Y$$

называются *ограничениями $\widetilde{M}$ на X и Y*. Для каждой точки $m \in X \cap \cap Y$ прообраз $\sigma^{-1}(m) \subset \widetilde{X}$ наделен действием $\pi_1(X)$ (теорема 17.6). Прообраз $\sigma^{-1}(m) \subset \widetilde{Y}$ наделен действием $\pi_1(Y)$ по той же самой причине. Мы получили, что отображение $\widetilde{M} \to \sigma^{-1}(m)$ задает функтор $\Psi: \mathscr{C}ov(M) \to \mathscr{C}$. Осталось доказать, что это эквивалентность.

Шаг 4. Пусть $S \in \mathscr{O}b(\mathscr{C})$ — множество с действием $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$, а $\sigma_X: \widetilde{X} \to X$, $\sigma_Y: \widetilde{Y} \to Y$ — соответствующие накрытия, существующие в силу эквивалентности категории накрытий и категории множеств с действием фундаментальной группы (см. теорему 17.6). Поскольку $X \cap Y$ связно, локально связно и односвязно, имеем

$$\sigma_X^{-1}(X \cap Y) = \sigma_Y^{-1}(X \cap Y) = X \cap Y \times S,$$

где S — множество связных компонент $\tilde{S}$. Пусть $x \in \widetilde{X}$, $y \in \widetilde{Y}$, причем при этом отождествлении элемент $x \in \sigma_X^{-1}(X \cap Y)$ равен $y \in \sigma_Y^{-1}(X \cap \cap Y)$. В таком случае мы напишем $x \sim y$. Пусть $\widetilde{M} = \widetilde{X} \sqcup \widetilde{Y}/\sim$ — фактор по отношению эквивалентности, определенному таким способом. Легко видеть, что естественная проекция $\sigma: \widetilde{M} \to M$ — накрытие (проверьте это). Действительно, проекция σ этальна, потому что M получается как фактор пространства $X \sqcup Y$ по отношению эквивалентности[1]

$$m \sim m' \iff m \in X,\ m' \in Y,\ m = m' \text{ в } X \cap Y,$$

а прообраз $\sigma^{-1}(U)$ по построению гомеоморфен $U \times S$, если σ_X, σ_Y расщепляются над $U \cap X$, $U \cap Y$.

Мы построили функтор из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}ov(M)$. Легко видеть, что этот функтор обратен Ψ (проверьте это). Поэтому Ψ — эквивалентность категорий.

Мы доказали, что категория $\mathscr{C}ov(M)$ накрытий пространства M эквивалентна категории $\mathscr{C}$ множеств с действием $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$. На шаге 1 было доказано, что категория $\mathscr{C}$ эквивалентна категории $\mathscr{R}ep(\pi_1(X) * \pi_1(Y), \mathscr{S}ets)$. В силу теоремы 17.6 категория $\mathscr{C}ov(M)$ эквивалентна $\mathscr{R}ep(\pi_1(M), \mathscr{S}ets)$. Используя замечание 17.10, мы выводим из эквивалентности категорий

$$\mathscr{R}ep(\pi_1(X) * \pi_1(Y), \mathscr{S}ets) \sim \mathscr{R}ep(\pi_1(M), \mathscr{S}ets)$$

изоморфизм групп

$$\pi_1(X) * \pi_1(Y) \cong \pi_1(M). \qquad \square$$

1 Для доказательства этого используйте замкнутость X и Y в M.

Замечание 17.26. Если $M=\bigcup M_i$, причем все частичные пересечения $M_{i_1}\cap M_{i_2}\cap\ldots$ односвязны, то $\pi_1(M)\cong\pi_1(M_1)*\pi_1(M_2)*\ldots$ Для конечного набора M_i это можно получить индукцией из теоремы Зейферта—ван Кампена, пользуясь ассоциативностью копроизведения. Для бесконечного набора доказательство по индукции не проходит. Впрочем, легко видеть, что доказательство, приведенное выше, можно провести для любого числа M_i ценой неимоверного усложнения обозначений. Проверьте это самостоятельно.

17.10. История, замечания

Теорема Зейферта—ван Кампена была получена ван Кампеном 1933 году в более общей ситуации, чем описано выше. Ван Кампен вычислил фундаментальную группу объединения двух топологических пространств, не предполагая связности и односвязности их пересечения. Доказательство, подобное вышеприведенному, в такой ситуации не проходит, потому что если пересечение пространств X и Y несвязно, то непонятно, куда поместить отмеченную точку.

Современная точка зрения на этот результат требует применения *фундаментального группоида*. *Группоидом* называется категория, все морфизмы которой — изоморфизмы. Пусть M — топологическое пространство. *Фундаментальным группоидом* пространства M называется категория, объекты которой — точки M, а морфизмы из x в y — классы гомотопии путей из x в y. Композиция морфизмов соответствует обычному умножению путей. Фундаментальный группоид содержит всю информацию о фундаментальной группе, но не требует неестественного выбора базовой точки. Гротендик по этому поводу сказал так:

«…люди привыкли работать с фундаментальной группой, ее образующими и соотношениями и продолжают делать это даже в контексте, где такой подход абсолютно неадекватен, когда ясное описание группы образующими и соотношениями можно получить, только работая одновременно с целой кучей базовых точек, правильно отобранных, либо получая эквивалентное описание в алгебраическом контексте группоидов, а не групп. Выбор путей, соединяющих базовые точки, и сведение группоида к одной группе безнадежно разрушает структуру и внутренние симметрии, присущие геометрической ситуации, приводя к безобразной куче образующих и соотношений, которые никто и не пытается выписать, потому что все понимают, что никакой пользы это не принесет и запутает картину вместо того, чтобы прояснить ее. Я узнал об этой трудности много лет назад, в ситуациях типа ван Кампена, когда единственная осмысленная формулировка задачи может быть получена только в терминах амальгамы группоидов…»

Теорему Зейферта—ван Кампена можно сформулировать следующим образом. Пусть U и V — топологические пространства. Тогда фундаментальный группоид $U \cup V$ — это расслоенное копроизведение фундаментальных группоидов U и V (взятое в категории группоидов). В такой общности доказательство теоремы Зейферта—ван Кампена получается значительно проще, чем доказательство ее более слабой версии, приведенное выше.

На странице Рональда Брауна (Ronald Brown) выложены его обзоры теории группоидов и любопытная переписка с Гротендиком, который много пропагандировал применение группоидов в топологии (`www.bangor.ac.uk/~mas010/topgpds.html`).

Теорему Зейферта—ван Кампена довольно часто называют теоремой ван Кампена. Эгберт ван Кампен получил образование в Ни-

Эгберт Рудольф ван Кампен
(Egbert Rudolf van Kampen, 1908—1942)

дерландах, но в 1931 г. уехал в Америку, где сотрудничал с Оскаром Зарисским. Зарисский пытался посчитать фундаментальную группу дополнения к алгебраической кривой и совместно с ван Кампеном добился успеха. Теорема Зейферта—ван Кампена получилась как побочный продукт этого сотрудничества.

Ван Кампен был вундеркиндом (он защитил диссертацию на 21-м году жизни). Он умер от рака весьма молодым.

Лекция 18

ПОДГРУППЫ В СВОБОДНЫХ ГРУППАХ И ТЕОРЕМА НИЛЬСЕНА—ШРАЙЕРА

18.1. Фундаментальная группа букета окружностей

Определение 18.1. *Графом* называется набор вершин и набор ребер, причем каждому ребру соответствуют две вершины (возможно, одинаковые), которые называются его *концами*, или *концом и началом*, и каждая вершина является концом хотя бы одного из ребер. Если двум ребрам соответствует одна и та же вершина, то эти ребра называются *смежными*, а вершина — *общей вершиной* ребер. Граф называется *конечным*, если число его ребер и вершин конечно.

Замечание 18.2. Определение графа чисто комбинаторное: даны два множества (вершин V и ребер E) и отображение $E \to \to V \times V/((x, y) \sim (y, x))$ из множества ребер в множество неупорядоченных пар вершин. Но для того чтобы получить в голове какую-то геометрическую картинку, полезно представлять себе граф как совокупность отрезков, соединяющих набор отмеченных точек — вершин. Это интуитивное представление можно формализовать, получив понятие *топологического пространства графа*.

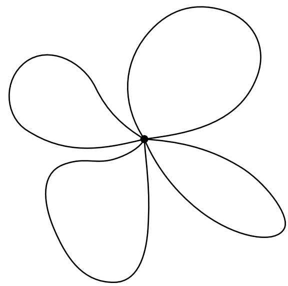
Определение 18.3. Пусть Γ — граф, а S — множество его ребер. Рассмотрим S как пространство с дискретной топологией, и пусть $X := S \times [0, 1]$ — несвязное объединение S копий отрезка. В этом случае $s \times \{1\}$ и $s \times \{0\}$ — точки в X, соответствующие началу или концу отрезка. Если у ребра s_1 и у ребра s_2 имеется общий конец, напишем $x_1 \sim x_2$, где $x_i = s_i \times \{1\}$ или $x_i = s_i \times \{0\}$ — соответствующие точки в X. *Топологическим пространством графа* называется факторпространство $X/\sim$ по такому соотношению эквивалентности.

Задача 18.1. Докажите, что топологическое пространство графа всегда хаусдорфово и локально линейно связно.

Замечание 18.4. Злоупотребляя обозначениями, мы будем обозначать граф и его топологическое пространство одной и той же буквой.

Определение 18.5. Граф называется *связным*, если его топологическое пространство связно.

Определение 18.6. Пусть Γ — граф, у которого есть всего одна вершина и n ребер. Его топологическое пространство называется *букетом окружностей*. Оно имеет вид ромашки, сделанной из нескольких (возможно, бесконечного числа) окружностей.



Букет четырех окружностей

Чтобы вычислить фундаментальную группу графа, проще всего воспользоваться теоремой Зейферта—ван Кампена. Пусть X — букет окружностей, а $X_1, X_2, \dots$ — составляющие его окружности. Пересечение любой пары различных X_i — единственная вершина графа, и она, очевидно, односвязна. Получаем, что

$$\pi_1(X) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) * \ldots = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \ldots$$

Мы доказали такую теорему.

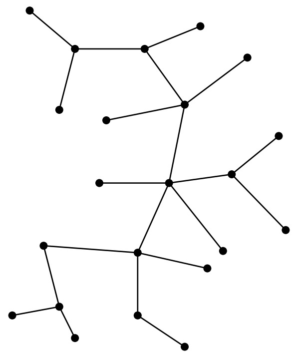
Теорема 18.7. *Фундаментальная группа букета окружностей свободна.* □

18.2. Деревья

Определение 18.8. Конечный связный граф называется *конечным деревом*, если у него n вершин и $n-1$ ребро.

Напомним, что топологическое пространство X называется *деформационным ретрактом* пространства $Y \supset X$, если задано непрерывное отображение $j: Y \to X$, тождественное на $X \subset Y$, причем j гомотопно тождественному отображению Id_Y из Y в себя.

Топологические пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными*, если заданы непрерывные отображения $\varphi: X \to Y$ и $\psi: Y \to X$, причем композиции $\psi \circ \varphi$ и $\varphi \circ \psi$ гомотопны тождественным.



Дерево с 22 вершинами и 21 ребром

Нетрудно доказать (см. лекцию 15), что любое пространство гомотопически эквивалентно своему деформационному ретракту, а фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

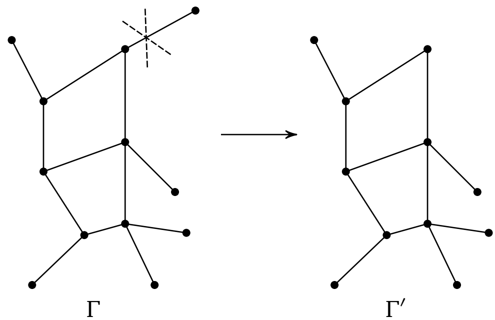
Определение 18.9. Пусть Γ — граф, а Γ' — граф, множества ребер и вершин которого являются подмножествами в множестве ребер и вершин графа Γ, причем концы сответствующих ребер в Γ и Γ' одни и те же. Тогда Γ' называется *подграфом* в Γ.

Замечание 18.10. Пусть Γ' — подграф графа Γ. Легко видеть, что топологическое пространство графа Γ' — замкнутое подмножество в топологическом пространстве графа Γ.

Определение 18.11. *Валентность* вершины графа — количество ребер, от 1 до ∞, которые с ней соединены. Вершина валентности 1 называется *висячей*, соответствующее ей ребро — *висячее ребро*.

Лемма 18.12. *Пусть* $\Gamma' \subset \Gamma$ — *подграф, полученный из* Γ *выбрасыванием висячего ребра* l *и одной вершины* (см. рисунок). *Тогда* Γ' *является деформационным ретрактом* Γ.

Доказательство. Пусть s — второй (невыкинутый) конец ребра l. Рассмотрим отображение $\psi\colon \Gamma \to \Gamma'$, переводящее l в s и тождественное на Γ'. Очевидно, оно непрерывно. Чтобы убедиться, что это деформационная ретракция, построим гомотопию из ψ в Id_γ. Предположим, что 0 на l соответствует s, а 1 соответствует выкинутой вершине. Пусть ψ_t действует тождественно на Γ' и переводит $\lambda \in [0, 1] = l$ в $t\lambda \in l$. Легко видеть, что ψ_t непрерывно, $\psi_0 = \psi$, а $\psi_1 = \mathrm{Id}_\gamma$. Поэтому Γ' — деформационный ретракт. $\square$



Граф, полученный выкидыванием висячего ребра

Замечание 18.13. Из этой леммы мы получили, что любой граф гомотопически эквивалентен своему подграфу, полученному выкидыванием висячего ребра.

Утверждение 18.14. *Конечное дерево стягиваемо (т. е. гомотопически эквивалентно точке).*

Доказательство. Воспользуемся индукцией. Пусть Γ — дерево из $n+1$ вершин и n ребер. Поскольку валентность каждой вершины не меньше 1, а вершин больше, чем ребер, найдется вершина с валентностью 1 (проверьте это). Соответствующее ребро висячее. Обозначим через Γ′ граф, полученный его выбрасыванием. У этого графа n вершин и $n-1$ ребро, значит, это дерево. В силу предыдущей леммы Γ гомотопически эквивалентно Γ′, а в силу предположения индукции Γ′ стягиваемо. □

Определение 18.15. Связный граф называется *деревом*, если любой его конечный связный подграф является конечным деревом.

Пример 18.16. Пусть Γ — граф, вершины которого — конечные последовательности натуральных чисел, а ребра соединяют любую последовательность A и An, где An получено из A добавлением n. Докажите, что Γ — дерево.

Утверждение 18.17. *Пусть* Γ — *дерево. Тогда* Γ *односвязно.*

Доказательство. *Шаг 0.* Отметим, что для любых двух точек x, y в Γ, соединенных ребром $[x, y]$, такое ребро единственно. Действительно, иначе в Γ был бы подграф с вершинами x, y и двумя ребрами, соединяющими эти вершины, но такой граф имеет 2 вершины, 2 ребра и не может быть деревом. Поэтому обозначение $[x, y]$ для соседних вершин x, y однозначно задает ребро.

Шаг 1. Пусть $\gamma \in \Omega(\Gamma, m)$ — петля в Γ, а $v_1, v_2, v_3, \ldots$ — различные вершины графа, которые последовательно обходит γ. Пусть $0 \leqslant t_1 < < t_2 < t_2 < \ldots \leqslant 1$ — такая последовательность чисел, что $\gamma(v_i) = t_i$. Поскольку последовательность $\{t_i\}$ монотонна, она сходится к пределу t, но тогда

$$\gamma(\lim t_i) = \gamma(t) = \lim v_i$$

в силу непрерывности γ. Это возможно, только если последовательность v_i конечна.

Шаг 2. Легко видеть, что путь, идущий по дереву из вершины x в вершину y, не заходя ни в какую другую вершину, гомотопен пути, идущему по ребру $[x, y]$. И в самом деле, пусть $\Gamma_{x,y}$ — граф, состоящий из всех ребер графа Γ с концами в вершинах x и y. Поскольку Γ — дерево, $\Gamma_{x,y}$ — тоже дерево, и все его ребра, кроме $[x, y]$, висячие. Поэтому $[x, y]$ — деформационный ретракт графа $\Gamma_{x,y}$. Взяв композицию γ с ретракцией, получим путь, идущий по ребру $[x, y]$ и гомотопный γ.

Шаг 3. Мы получили, что любая петля в графе Γ гомотопна петле, которая обходит вершины $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ по ребрам $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3]$, … Значит, любая петля гомотопна петле, которая обходит конечный подграф графа Γ. Но конечные связные подграфы графа Γ стягиваемы, значит, все такие петли тоже стягиваемы. □

18.3. Унициклические графы

Определение 18.18. Конечный связный граф Γ называется *унициклическим*, если у него n вершин и n ребер.

Замечание 18.19. Пусть Γ — связный граф без висячих вершин, имеющий n ребер и m вершин. Поскольку каждое ребро соединяет две вершины и к каждой вершине присоединяются как минимум два ребра, имеем $n \geqslant m$, причем равенство имеет место, только если все вершины графа Γ имеют валентность 2.

Мы получили следующую лемму.

Лемма 18.20. *Пусть Γ — конечный унициклический граф без висячих вершин. Тогда все его вершины двухвалентные. Более того, граф Γ гомеоморфен окружности.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией. Пусть Γ — унициклический граф без висячих вершин, а s — его вершина, к которой примыкают ребра $[x, s]$ и $[s, y]$. Легко видеть, что Γ гомеоморфен графу, полученному из Γ выкидыванием вершины s и заменой ребер $[x, s]$ и $[s, y]$ на $[x, y]$.

Воспользовавшись индукцией, получим, что Γ гомеоморфен унициклическому графу с одной вершиной и одним ребром, т. е. окружности. □

Следствие 18.21. *Пусть* Γ — *конечный унициклический граф. Тогда он гомотопически эквивалентентен окружности.*

Доказательство. Пусть граф Γ' получен из Γ выкидыванием висячего ребра. Тогда Γ' является деформационным ретрактом графа Γ и тем самым гомотопически эквивалентен Γ. Выкидывая висячие ребра, пока они не кончатся, получим унициклический граф, гомеоморфный окружности. □

Замечание 18.22. Аналогичное рассуждение доказывает, что связный граф, у которого n вершин и $n+k$ ребер, гомотопически эквивалентен букету $k+1$ окружностей.

Утверждение 18.23. *Пусть* Γ_1 — *дерево, полученное из графа* Γ *выкидыванием одного ребра. Предположим, что* Γ *не дерево. Тогда* $\pi_1(\Gamma)=\mathbb{Z}$.

Доказательство. Поскольку Γ не дерево, в Γ содержится конечный подграф Γ_1, у которого n вершин и $n+k$ ребер, $k \geqslant 0$. Поскольку выкидывание одного ребра l превращает Γ_1 в дерево, $k=0$ и граф Γ_1 унициклический. Пусть $\Gamma \setminus l$, $\Gamma_1 \setminus l$ — графы, полученные из Γ и Γ_1 выкидыванием l. Тогда Γ получен объединением Γ_1 и $\Gamma \setminus l$, причем их пересечение $\Gamma_1 \setminus l$ является деревом, следовательно, односвязно. Применив теорему Зейферта—ван Кампена, получим, что $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(\Gamma_1) * \pi_1(\Gamma \setminus l)$. Поскольку $\Gamma \setminus l$ дерево, оно односвязно, значит, $\pi_1(\Gamma)=\pi_1(\Gamma_1)=\mathbb{Z}$. □

Определение 18.24. Будем называть связный граф Γ *унициклическим*, если $\pi_1(\Gamma)=\mathbb{Z}$.

18.4. Фундаментальная группа графа

Определение 18.25. Пусть Γ — связный граф. Его *остовом* называют максимальный подграф $\Gamma' \subset \Gamma$, являющийся деревом.

Замечание 18.26. Слово *максимальный* в этом определении надо понимать так: при добавлении любого ребра из $\Gamma \setminus \Gamma'$ к Γ' он перестает быть деревом. Применив лемму Цорна, легко убедиться, что у каждого графа есть остов (проверьте это).

Теорема 18.27. *Пусть* Γ — *связный граф. Тогда группа* $\pi_1(\Gamma)$ *свободна.*

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть $\Gamma' \subset \Gamma$ — остов графа Γ, полученный из Γ выкидыванием ребер l_α, проиндексированных индексами $\alpha \in I$, а Γ_{l_α} — объединение Γ' и l_α. В силу утверждения 18.23 имеем $\pi_1(\Gamma_{l_\alpha}) = \mathbb{Z}$.

Шаг 2. Имеем $\Gamma = \bigcup_{\alpha \in I} \Gamma_{l_\alpha}$, причем пересечение $\Gamma_{l_\alpha} \cap \Gamma_{l_{\alpha'}}$ для любых $\alpha \neq \alpha'$ равно Γ', следовательно, односвязно. Применяя теорему Зейферта—ван Кампена, получаем

$$\pi_1(\Gamma) = \coprod_{\alpha \in I} \pi_1(\Gamma_{l_\alpha}) = \coprod_{\alpha \in I} \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Замечание 18.28. Поскольку конечный граф Γ гомотопически эквивалентен букету сфер, свободность $\pi_1(\Gamma)$ для конечного графа немедленно следует из подсчета фундаментальной группы букета сфер, проведенного выше.

Из приведенного выше подсчета фундаментальной группы графа вытекает следующая важная теорема.

Теорема 18.29 (теорема Нильсена—Шрайера, Nielsen—Schreier theorem). *Пусть* F — *свободная группа, а* $G \subset F$ — *ее подгруппа. Тогда группа* G *свободна.*

Доказательство. Группу F можно получить как фундаментальную группу пространства M, гомеоморфного букету окружностей. Пусть $\widetilde{M}$ — универсальное накрытие пространства M, снабженное естественным действием F, а $M_G = \widetilde{M}/G$ — его фактор по G. Легко видеть, что M_G — граф (проверьте). Поскольку $\widetilde{M} \to M_G$ — универсальное накрытие, $\pi_1(M_G) = G$. Значит, G — фундаментальная группа графа, а такая группа свободна по предыдущей теореме. $\square$

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Листок 0

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Для этого листка требуется знакомство с понятием поля. Определения и задачи, приведенные ниже, знакомы большинству студентов. Желающие освежить школьную программу или вспомнить основные определения могут посмотреть этот листок и прорешать задачи. В топологии можно обойтись без вещественных чисел, но понятие вещественного числа — ключевое в метрической геометрии; большое число примеров топологических пространств строится на основе вещественных чисел.

0.1. Фундаментальные последовательности

Обычно вещественные числа приближают рациональными — например, раскладывают число a в бесконечную десятичную дробь $a_0{,}a_1a_2\ldots$ и рассматривают разные конечные отрезки $a_0{,}a_1a_2\ldots a_n$ этой дроби как все более точные приближения числа a. При этом некоторые дроби объявляются эквивалентными, например, 1,00000… и 0,9999… Оказывается, строго определять арифметические операции на вещественных числах и доказывать их свойства проще, если рассматривать не конкретно десятичные дроби, а вообще любые последовательности рациональных чисел, приближающие данное вещественное число. При этом снова надо учитывать, что разные последовательности могут быть эквивалентными (приближать одно и то же число). С логической точки зрения проще всего просто *объявить* вещественным числом множество приближающих его последовательностей рациональных чисел. На этом основан подход Коши к строгому построению множества вещественных чисел.

Определение 0.1. Будем говорить, что нечто верно для *почти всех* элементов множества, если оно верно для всех элементов, кроме конечного их числа. Пусть $\{a_i\} = a_0, a_1, a_2, \ldots$ — последовательность рациональных чисел. Говорят, что $\{a_i\}$ — *фундаментальная последовательность*, или *последовательность Коши*, если для любого рационального $\varepsilon > 0$ существует отрезок $[x, y]$ длины ε, который содержит почти все $\{a_i\}$.

Задача 0.1. Пусть a — рациональное число. Докажите, что постоянная последовательность $a, a, \dots$ — последовательность Коши.

Такую последовательность мы будем обозначать через $\{a\}$.

Задача 0.2. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность Коши. Переставим в произвольном порядке элементы a_i. Докажите, что получится последовательность Коши.

Задача 0.3. Дана последовательность $\{a_i\}$ рациональных чисел, принадлежащих отрезку $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Докажите, что из $\{a_i\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая является последовательностью Коши.

Указание. Разделим отрезок $I_0 = [a, b]$ пополам. В одной из половин (обозначим ее I_1) содержится бесконечное число элементов последовательности. Выкинем из $\{a_i\}$ все элементы, кроме a_0, которые не лежат в I_1. Разделим I_1 пополам и т. д. В отрезке I_k, полученном на k-м шаге, содержатся все элементы полученной последовательности, начиная с k-го, и этот отрезок имеет длину $\dfrac{b-a}{2^k}$.

Задача 0.4[!]. Дана монотонно возрастающая последовательность $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \dots$ Известно, что все a_i ограничены сверху некоторой константой C: $a_i \leqslant C$. Докажите, что это последовательность Коши.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 0.2. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — последовательности Коши. Они называются *эквивалентными*, если последовательность $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ — последовательность Коши.

Задача 0.5. Пусть a, b — два рациональных числа. Докажите, что $\{a\} = \{a, a, a, \dots\}$ эквивалентна $\{b\} = \{b, b, b, \dots\}$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

Задача 0.6. Докажите, что последовательность Коши эквивалентна любой своей подпоследовательности.

Задача 0.7. Докажите, что если последовательность $\{a_i\}$ эквивалентна $\{b_i\}$, то последовательность $\{b_i\}$ эквивалентна $\{a_i\}$.

Задача 0.8[!]. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — две неэквивалентные последовательности Коши. Докажите, что существуют два непересекающихся интервала I_1, I_2 с тем свойством, что почти все a_i лежат в I_1, а почти все b_i — в I_2.

Указание. Примените определение последовательности Коши к $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$ для всех n.

Задача 0.9[!]. Докажите, что если последовательность $\{a_i\}$ эквивалентна последовательности $\{b_i\}$, а последовательность $\{b_i\}$ эквивалентна последовательности $\{c_i\}$, то $\{a_i\}$ эквивалентна $\{c_i\}$. (Это свойство выражают словами «эквивалентность последовательностей Коши транзитивна».)

Определение 0.3. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — две неэквивалентные последовательности Коши. Говорят, что $\{a_i\} > \{b_i\}$, если $a_i > b_i$ для почти всех i.

Задача 0.10. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — две неэквивалентные последовательности Коши. Докажите, что или $\{a_i\} < \{b_i\}$, или $\{b_i\} < \{a_i\}$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 0.8.

Задача 0.11. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — две неэквивалентные последовательности Коши и $\{a_i\} < \{b_i\}$. Докажите, что существуют два рациональных числа c, d, для которых $\{a_i\} < \{c\} < \{d\} < \{b_i\}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущим указанием.

Задача 0.12. Пусть $\{a_i\} < \{b_i\}$, а последовательность $\{b_i\}$ эквивалентна $\{c_i\}$. Докажите, что $\{a_i\} < \{c_i\}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и определением последовательности Коши для любого $\varepsilon < |c-d|$.

Задача 0.13. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность Коши, а $c \in \mathbb{Q}$ — рациональное число. Докажите эквивалентность следующих свойств:

1) последовательность $\{a_i\}$ эквивалентна последовательности $\{c\}$ все элементы которой совпадают с числом c;

2) в любом открытом интервале (x, y), содержащем c, содержится бесконечно много элементов последовательности $\{a_i\}$;

3) в любом открытом интревале (x, y), содержащем c, содержатся почти все элементы последовательности $\{a_i\}$.

Определение 0.4. Если любое из вышеуказанных свойств выполнено, мы говорим, что последовательность $\{a_i\}$ сходится к c.

Задача 0.14. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — последовательности Коши. Докажите, что $\{a_i + b_i\}$ и $\{a_i - b_i\}$ — последовательности Коши.

Задача 0.15. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — последовательности Коши, причем $\{b_i\}$ сходится к 0. Докажите, что последовательность $\{a_i\}$ эквивалентна $\{a_i + b_i\}$.

Задача 0.16. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — последовательности Коши. Докажите, что $\{a_i b_i\}$ — последовательность Коши.

Задача 0.17. Докажите, что если последовательность $\{b_i\}$ сходится к 1, то последовательность $\{a_i b_i\}$ эквивалентна $\{a_i\}$.

Задача 0.18. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность Коши из ненулевых чисел, которая не сходится к 0. Докажите, что $\{a_i^{-1}\}$ — последовательность Коши.

Указание. Докажите, что существует такой не содержащий 0 замкнутый отрезок $[x, y]$, что почти все $\{a_i\}$ содержатся в $[x, y]$. Пусть почти все $\{a_i\}$ содержатся в отрезке $I \subset [x, y]$ длины ε. Докажите, что все $\{a_i^{-1}\}$, кроме конечного числа, содержатся в отрезке I^{-1} длины $\varepsilon \min(|x|, |y|)^{-1}$.

Определение 0.5. *Классом эквивалентности* последовательности Коши $\{a_i\}$ называется множество всех последовательностей Коши, эквивалентных $\{a_i\}$. Множество классов эквивалентностей последовательностей Коши называется *множеством действительных чисел* и обозначается через $\mathbb{R}$.

Задача 0.19. Докажите, что соответствие $c \to \{c\}$ задает инъективное отображение из множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел в $\mathbb{R}$.

Задача 0.20!. Докажите, что четыре арифметические операции, которые мы определили на $\mathbb{R}$ в задачах 0.14—0.18, задают на $\mathbb{R}$ структуру поля.

0.2. Дедекиндовы сечения

Главный недостаток определения действительных чисел через фундаментальные последовательности — это то, что эквивалентных фундаментальных последовательностей очень много: определение получается очень неявным. Трудность эта скорее психологическая. Тем не менее, есть способ ее преодолеть — более наглядное определение вещественных чисел, которое предложил Дедекинд.

Определение 0.6. Пусть $R \subset \mathbb{Q}$ — подмножество в множестве рациональных чисел, которое непусто и не равно всему $\mathbb{Q}$. Говорят, что R — *сечение Дедекинда*, если из того, что $a \in R$ и $b < a$, следует, что $b \in R$. Сечение Дедекинда R называется *замкнутым*, если существует такое рациональное число a, что $b \in R$ тогда и только тогда, когда $b \leqslant a$. В противном случае R называется *открытым*.

Пусть $\{a_i\}$ — последовательность Коши. Обозначим через $R_{\{a_i\}}$ множество таких рациональных чисел b, что $\{b\} < \{a_i\}$.

Задача 0.21. Докажите, что $R_{\{a_i\}}$ — сечение Дедекинда (т. е. если $b \in R_{\{a_i\}}$, а $c < b$, то $c \in R_{\{a_i\}}$). Докажите, что это сечение открыто.

Задача 0.22. Пусть $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ — эквивалентные последовательности Коши. Докажите, что $R_{\{a_i\}} = R_{\{b_i\}}$.

Задача 0.23. Пусть $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ — неэквивалентные последовательности Коши и $\{a_i\} < \{b_i\}$. Докажите, что $R_{\{a_i\}} \subset R_{\{b_i\}}$, но эти множества не совпадают.

Указание. Рассмотрите точки отрезка $[c, d]$ из задачи 0.11; какому из множеств $R_{\{a_i\}}$, $R_{\{b_i\}}$ они принаделжат?

Задача 0.24*. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ — две последовательности Коши. Докажите, что они эквивалентны тогда и только тогда, когда $R_{\{a_i\}} = R_{\{b_i\}}$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 0.10 (и предыдущими задачами).

Задача 0.25*. Пусть $R \subset \mathbb{Q}$ — открытое сечение Дедекинда. Докажите, что $R = R_{\{a_i\}}$ для какой-то фундаментальной последовательности $\{a_i\}$.

Указание. Рассмотрите такой отрезок $I_0 = [a, b]$, что a лежит в R, а b — нет. Поделите его пополам и выберите половину I_1 с тем же свойством. Повторите процесс и возьмите в качестве a_i любую точку отрезка I_i.

Мы видим, что множество классов эквивалентности последовательностей Коши — это то же самое, что множество открытых сечений Дедекинда. Поэтому действительные числа можно с тем же успехом определять как сечения Дедекинда. В дальнейшем пользуйтесь тем из определений, которое вам удобнее.

Задача 0.26.** Определите арифметические операции на $\mathbb{R}$ непосредственно через сечения Дедекинда, не прибегая к последовательностям Коши. Проверьте аксиомы поля.

Указание. Чтобы определить умножение, определите сначала операции «умножение на положительное действительное число a» и «умножение на -1» и докажите дистрибутивность для каждой из них по отдельности.

0.3. Супремум и инфимум

Определение 0.7. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — некоторое подмножество в $\mathbb{R}$. Множество A называется *ограниченным снизу*, если все его элементы больше некоторой константы $C \in \mathbb{R}$. Множество A называется *ограниченным сверху*, если все его элементы меньше некоторой константы $C \in \mathbb{R}$. Множество A называется *ограниченным*, если оно ограниченно сверху и снизу.

Определение 0.8. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — некоторое подмножество $\mathbb{R}$. Инфимум множества A (обозначается $\inf A$) есть такое число $c \in \in \mathbb{R}$, что $c \leqslant a$ для всех $a \in A$ и в любом открытом интервале (x, y), содержащем c, содержатся и элементы множества A. Супремум A (обозначается $\sup A$) есть такое число $c \in \mathbb{R}$, что $c \geqslant a$ для всех $a \in \in A$ и в любом открытом отрезке (x, y), содержащем c, содержатся и элементы A.

Задача 0.27. Докажите, что $\inf A$ и $\sup A$ единственны (если они существуют).

Задача 0.28!. Пусть A — ограниченное сверху множество. Докажите, что $\sup A$ существует.

Указание. Рассмотрим все $a \in A$ как сечения Дедекинда, т. е. подмножества в $\mathbb{Q}$. Возьмем их объединение R; поскольку все a не превосходят C, это будет тоже сечение Дедекинда. Докажите, что $\sup A = R$.

Задача 0.29!. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — ограниченное снизу множество. Докажите, что $\inf A$ существует.

Замечание. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ не ограничено снизу (сверху). Тогда пишут $\inf A = -\infty$ ($\sup A = \infty$).

0.4. Корни многочленов нечетной степени

Задача 0.30!. Дан многочлен нечетной степени над $\mathbb{Q}$, $P = t^{2n+1} + a_{2n}t^{2n} + a_{2n-1}t^{2n-1} + \ldots + a_0$. Пусть R_P — множество всех $x \in \mathbb{Q}$, для которых $P(t) < 0$ на множестве $(-\infty, x]$. Докажите, что R_P непусто.

Указание. Докажите, что R_P содержит $-\max(1, \sum |a_i|)$.

Задача 0.31!. Докажите, что R_P — не всё множество вещественных чисел.

Указание. Докажите, что $\mathbb{Q} \setminus R_P$ содержит $\max(1, \sum |a_i|)$.

Задача 0.32!. Докажите, что R_P — сечение Дедекинда.

Задача 0.33!. Докажите, что P удовлетворяет *свойству Липшица*: для любого отрезка I существует такая константа $C > 0$, что $|P(a) - P(b)| < C|a - b|$ для любых $a, b \in I$.

Задача 0.34!. Рассмотрим дедекиндово сечение R_P как вещественное число. Докажите, что $P(R_P) = 0$. Тем самым любой многочлен нечетной степени над $\mathbb{R}$ имеет корень.

Указание. Докажите сначала, что $P(R_P) \leqslant 0$. Затем докажите, что неравенство $P(R_P) < 0$ противоречит задаче 0.33.

0.5. Пределы

Определение 0.9. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — подмножество в множестве вещественных чисел, а c — вещественное число. Точка c называется *предельной точкой* последовательности A, если для каждого открытого интервала $I = (x, y)$, содержащего c, в I содержится бесконечно много элементов множества A.

Определение 0.10. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность вещественных чисел, а c — вещественное число. Пусть для каждого открытого интервала $I = (x, y)$, содержащего c, в I содержатся все элементы последовательности $\{a_i\}$, кроме конечного числа. Тогда говорят, что c есть *предел последовательности* $\{a_i\}$ (обозначается $c = \lim\limits_{i\to\infty} a_i$). Еще говорят, что последовательность $\{a_i\}$ *сходится к* c, или *стремится к* c.

Задача 0.35. Пусть c — предельная точка последовательности $\{a_i\}$. Докажите, что из $\{a_i\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к c.

Задача 0.36*. Дана последовательность $\{a_i\}$ точек на отрезке $[x, y]$. Докажите, что у нее есть предельные точки.

Определение 0.11. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *дискретным*, если у него нет предельных точек.

Задача 0.37*. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность вещественных чисел. Обозначим множество всех a_i через A. Докажите, что $\{a_i\}$ сходится тогда и только тогда, когда A не имеет бесконечных дискретных подмножеств и имеет единственную предельную точку, или приведите контрпример к этому утверждению.

Задача 0.38. Рассмотрим последовательность 0, 1, 2, 3, 4, … Докажите, что у этой последовательности нет предела.

Задача 0.39. Рассмотрим последовательность 0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, … Докажите, что эта последовательность сходится к 0.

Задача 0.40. Дана монотонно возрастающая последовательность $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$, $a_i \in \mathbb{R}$. Известно, что все a_i ограничены сверху некоторой константой C: $a_i \leqslant C$. Докажите, что эта последовательность имеет предел. Используйте определение вещественных чисел через сечения Дедекинда.

Указание. Докажите, что $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \sup\{a_i\}$, и воспользуйтесь существованием супремума.

Определение 0.12. Пусть $\{a_i\} = a_0, a_1, a_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел. Говорят, что $\{a_i\}$ — *последовательность Коши*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует отрезок $[x, y]$ длины ε, который содержит все $\{a_i\}$, кроме конечного числа.

Замечание. То же самое определение используется для последовательностей Коши рациональных чисел.

Задача 0.41. Пусть последовательность $\{a_i\}$ сходится к какому-нибудь вещественному числу c. Докажите, что это последовательность Коши.

Задача 0.42. Пусть у последовательности Коши $\{a_i\}$ есть подпоследовательность, которая сходится к $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\{a_i\}$ сходится к x.

Задача 0.43. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность Коши. Рассмотрим последовательность $\{b_i\}$, $b_i = \inf_{j\geqslant i} a_j$. Докажите, что этот инфимум определен и что последовательность b_i возрастает.

Задача 0.44. В условиях предыдущей задачи докажите, что если последовательность $\{b_i\}$ имеет предел, то $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \lim\limits_{i\to\infty} b_i$.

Задача 0.45$^!$. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность Коши. Докажите, что $\{a_i\}$ сходится. Используйте определение вещественных чисел через сечения Дедекинда.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 0.46$^!$. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность Коши. Докажите, что $\{a_i\}$ сходится. Используйте определение вещественных чисел через последовательности Коши.

Указание. Пусть вещественное число $\{a_i\}$ представлено последовательностью Коши рациональных чисел $a_i(0), a_i(1), a_i(2), \ldots$ Перейдя к подпоследовательности, можно предполагать, что все a_i $(i > n)$ содержатся в отрезке длины 2^{-n} и все $a_i(j)$ $(j > m)$ содержатся в отрезке длины 2^{-m}. Докажите, что последовательность $\{a_i(i)\}$ — последовательность Коши и к представленному ей вещественному числу сходится последовательность $\{a_i\}$.

Задача 0.47$^!$ (теорема о двух милиционерах)**.** Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\{c_i\}$ — сходящиеся последовательности вещественных чисел, причем $a_i \leqslant b_i \leqslant c_i$ для всех i. Предположим, что $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \lim\limits_{i\to\infty} c_i = x$. Докажите, что $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = x$.

Задача 0.48*. Пусть последовательность $\{a_i\}$ сходится к x. Докажите, что последовательность $b_j = \frac{1}{j}\sum\limits_{i=0}^{j} a_i$ сходится к x. Приведите пример, когда $\{b_j\}$ сходится, а $\{a_i\}$ не сходится.

0.6. Ряды

Определение 0.13. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность вещественных чисел. Рассмотрим последовательность частичных сумм $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i$. Если эта последовательность сходится, говорят, что *ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ *сходится*. В этом случае пишут $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = x$, где

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Часто пишут проще: $\sum a_i = x$.

Определение 0.14. Ряд $\sum a_i$ *абсолютно сходится*, если сходится ряд $\sum |a_i|$.

Задача 0.49!. Дан абсолютно сходящийся ряд $\sum a_i$. Докажите, что этот ряд сходится.

Задача 0.50. Дан абсолютно сходящийся ряд $\sum a_i$. Пусть b_i — такая последовательность неотрицательных чисел, что $a_i \geqslant b_i$. Докажите, что ряд $\sum b_i$ абсолютно сходится.

Задача 0.51.** Пусть a_i, b_i — такие последовательности вещественных чисел, что ряды $\sum a_i^2$, $\sum b_i^2$ сходятся. Докажите, что ряд $\sum a_i b_i$ сходится.

Задача 0.52*. Пусть a_i — последовательность положительных вещественных чисел. Предел последовательности произведений

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} (1+a_i)$$

обозначается $\prod\limits_{i=0}^{\infty}(1+a_i)$. Если этот предел существует, то говорят, что бесконечное произведение $\prod\limits_{i=0}^{\infty}(1+a_i)$ сходится. Пусть произведение $\prod\limits_{i=0}^{\infty}(1+a_i)$ сходится. Докажите, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ сходится.

Задача 0.53*. Докажите сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{i=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$.

Задача 0.54.** Пусть ряд $\sum a_i$ сходится. Докажите, что $\prod\limits_{i=0}^{\infty}(1+a_i)$ тоже сходится.

Задача 0.55!. Пусть $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ — монотонно убывающая последовательность положительных вещественных чисел, которая стремится к нулю. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i$. Докажите, что этот ряд сходится.

Задача 0.56. Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ сходится.

Указание. Воспользуйтесь соотношением $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$.

Задача 0.57. Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится.

Задача 0.58. Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{n!}$ сходится.

Задача 0.59!. Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится. Вычислите, к чему он сходится.

Задача 0.60*. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится для всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 0.61.** Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ в полном упорядоченном поле A. Сходится ли эта сумма для всех $x \in A$?