

28 декабря 2023

Метрические пр-ва

1) $d(a,b) \geq 0$

2) Треуг. неравенство

(A, d)

расстояние

$d(a,b)$

$a, b \in X$

расстояние между a и b

$d: A \times A \rightarrow$



\mathbb{N}



X бесконечно

\Leftrightarrow

X равносильно

собственному ординату

$B \subset X$

$B \neq \emptyset$

$B \neq X$

$\{X, B, d\}$

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$

$\frac{m}{n}$



$(2, 7)$

$(4, 4)$

$(a,b) \sim (c,d)$

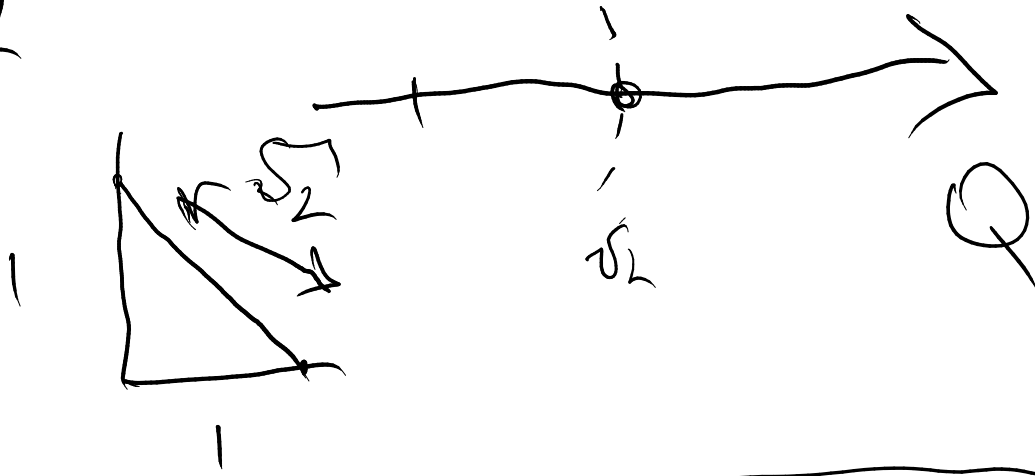
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

$\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21}$

Проблема \mathbb{Q}

- их мало, в них есть дыры

$\sqrt{2}$



Аксиома Полноты \mathbb{R}

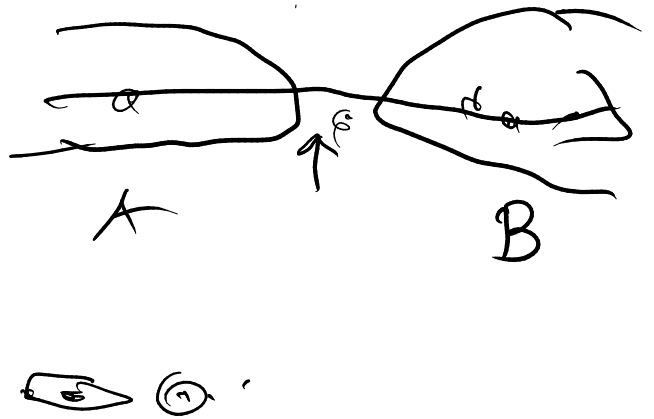
$\forall A, B \subset \mathbb{R}$

$\forall a \in A \quad a \leq b$

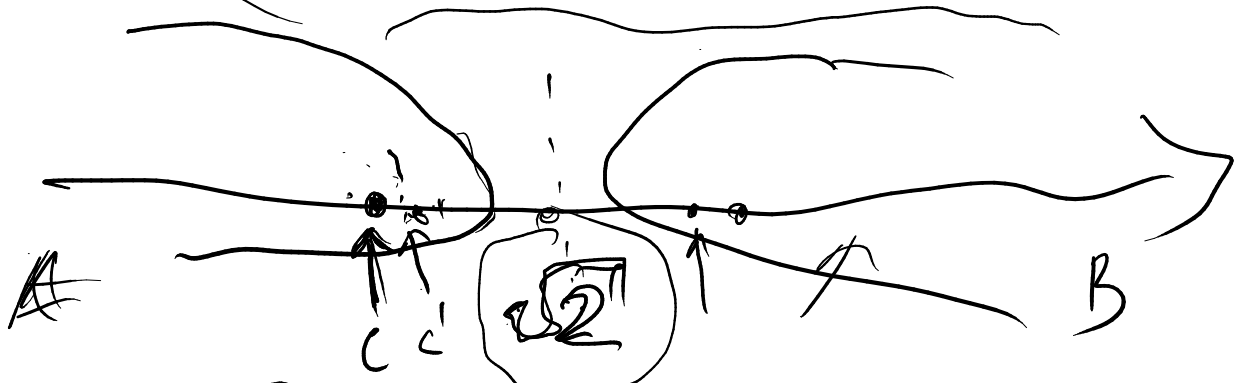
$\forall b \in B$

$\exists c : \forall a \in A \quad a \leq c$

$\forall b \in B \quad c \leq b$



\mathbb{Q}



$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$$

$$x^2 \neq 2$$

$$\exists c$$

$$c = 1,1$$

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

\mathbb{R} — множество действительных чисел
 real (вещественных)

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$$

$$\frac{a+b}{+(a,b)} \quad +: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

\mathbb{R} — группа по сложению +

- 1) $a+b = b+a$ (коммутативность +)
- 2) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ассоциативность
- 3) $\exists c: \forall a \quad a+c = a$ c — ноль 0

4) $\forall a \exists c \quad a+c=0$
 \uparrow
 $(-a)$

- 1) $a \cdot b = b \cdot a$
- 2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 3) $\exists 1: a \cdot 1 = a$
- 4) $\exists \left(\frac{1}{a}\right) \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$

2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{2) } \text{порядок} \\ \text{3) } \text{н.о.} \\ \text{4) } \text{ } \end{array} \right.$

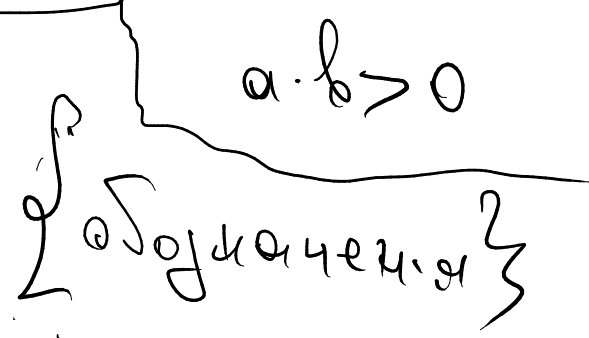
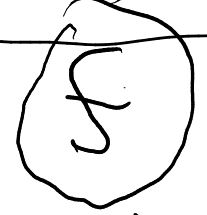
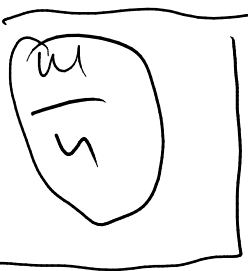
$a(b+c) = ab + ac$

ii) $1 \neq 0$

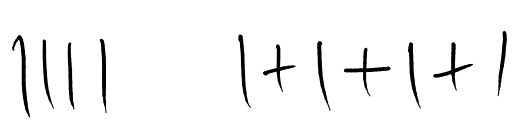
- i) $a \leq a$
- ii) $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$
- iii) $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

порядок

- i) $a \leq b$
 \Downarrow
 $a+c \leq b+c$
- ii) $a > 0$
 $b > 0$



$a \cdot b > 0$



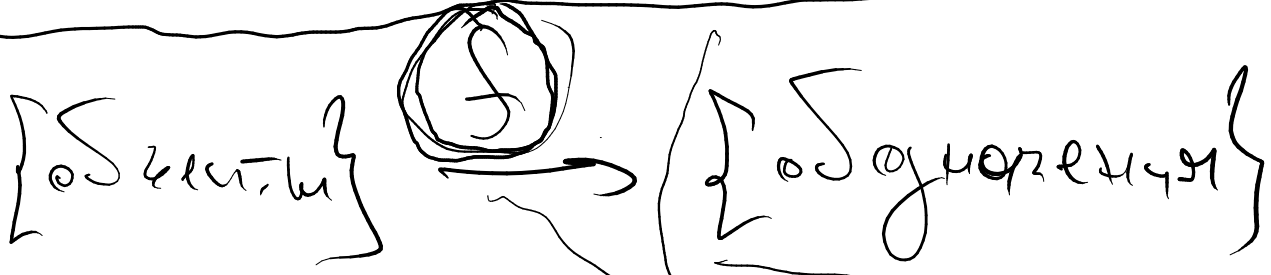
$\left\{ \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \rightarrow A = \{a_1, a_2, a_3\}$

12

327

1 1 1
100 10 1

$$1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$



327
2

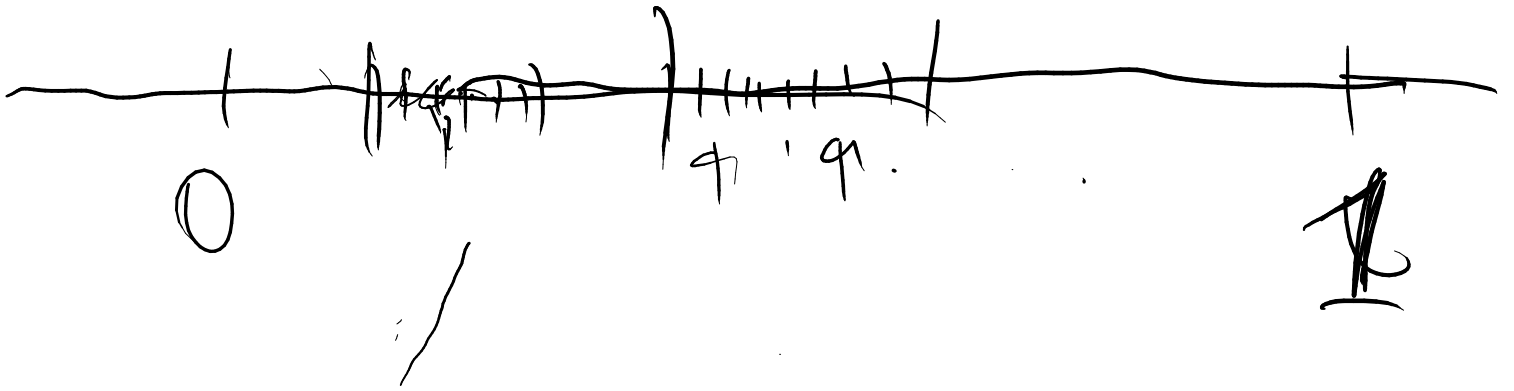
327
4

327

Уажроо рейсвитавного зисау
 есво јанисв в вира јескопе зџи
 реслтичноу фроду

① 227...

0.72...



a, b

$a \neq b$

π

$1 = 1,0000...$

$1, (0)$

0,3000...

2(37)3737...

$\sqrt{2} = 1,4142...$

1,4142...

Теорема

x рационален ($x = \frac{m}{n}$) \Leftrightarrow

b делится x бесконечным
дробью есть период.

Доказательство

$\Rightarrow x \in \mathbb{Q} \rightsquigarrow 0,79\dots$

$$\frac{m}{n}$$

$$\begin{array}{cc} \mathbb{N} & \mathbb{N} \\ \cup & \cup \end{array}$$

Деление с остатком a на b

найти $m, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq n < b$

$$a = m \cdot b + n$$

$$28 : 5$$

$$28 = \underbrace{5 \cdot 5}_{m \cdot b} + \underbrace{3}_n$$

$$5 = 1 \cdot 2 + 3$$

$$2 \cdot 2 + 1$$

$$x = \frac{m}{n}$$

$$\frac{25}{11}$$

$$0 \leq b < n$$

$$\{0, 1, \dots, 10\}$$

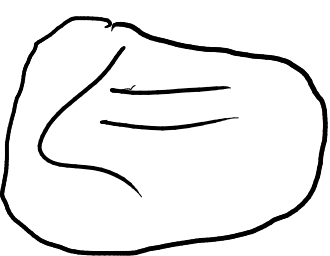
$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 11} \\ \underline{22} \\ 22727 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \underline{22} \\ 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \underline{77} \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \underline{22} \\ 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \underline{77} \end{array}$$



$$\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$$

$$7, (123)123 = 7 + X$$

$$0, (123)123 = X$$

$$7.333 + 41$$

$$\left. \begin{array}{r} 333 \\ 41 \end{array} \right\}$$

$$7 \overline{333}$$

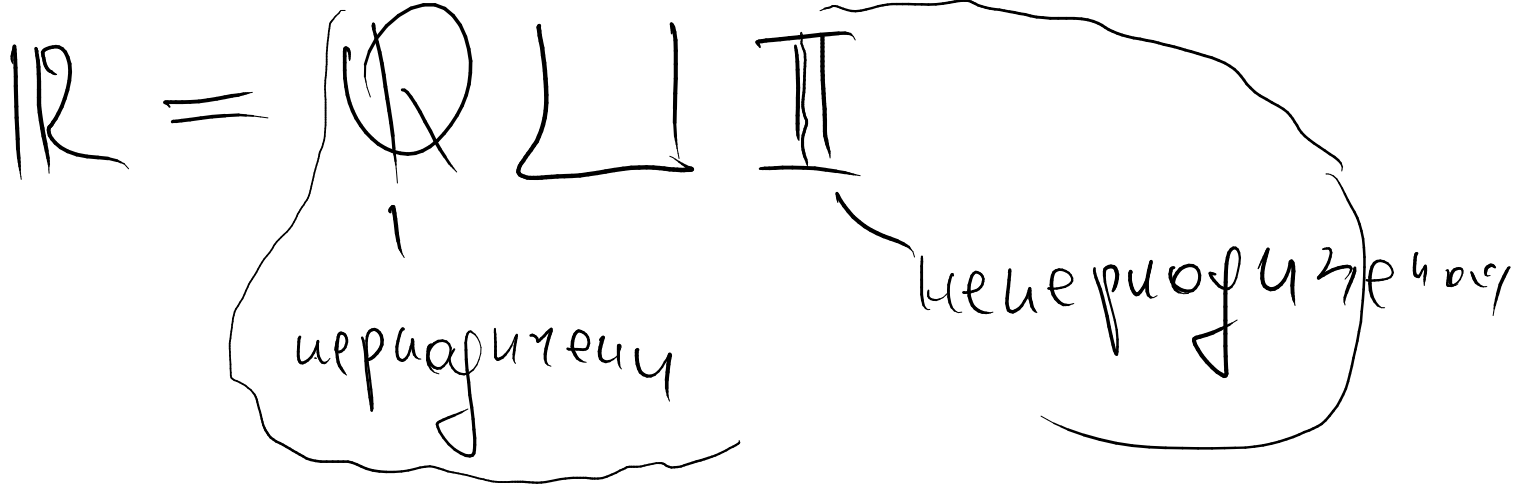
$$1000 \cdot X = 123, (123)$$

$$1000X = 123 + X$$

$$999X = 123 \Rightarrow X = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

$$\overline{0, a_1 \dots a_n}$$

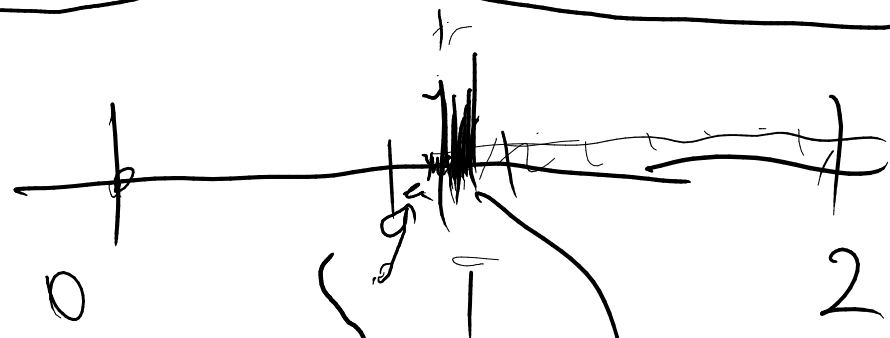
$$10^n X = a_1 \dots a_n + X$$



$\sqrt{2} = 1,4142 \dots$

$\pi = 3,1415 \dots$

$e = 2,78 \dots$



$$\begin{array}{r}
 1,000000 \\
 \hline
 0,999999 \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

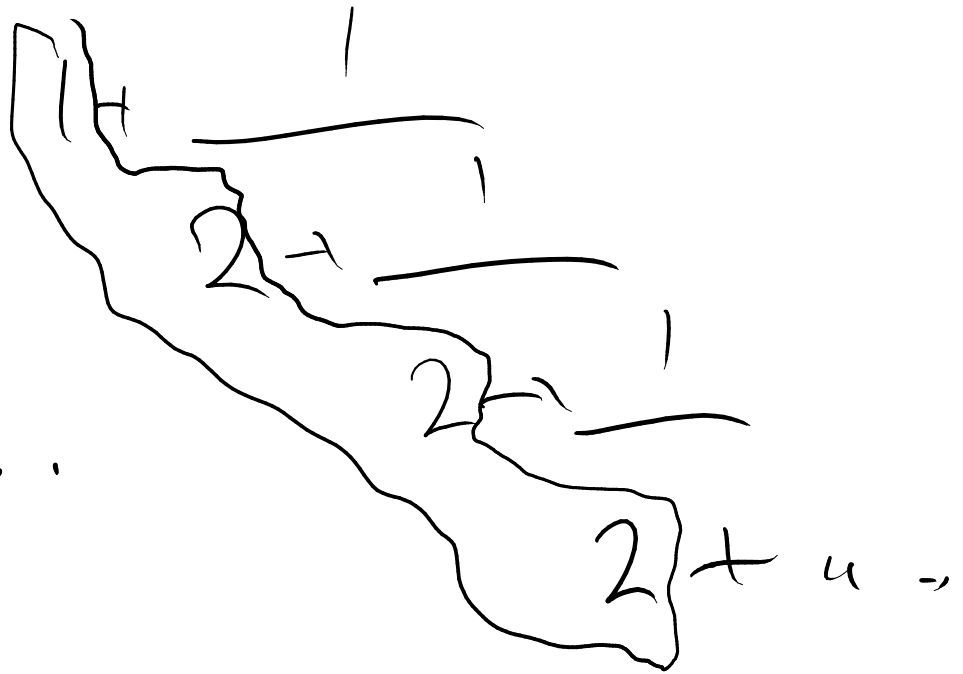
$x = 0,9$

$10 \cdot x = 9,9 \dots$

$10 \cdot x = 9 + x$

$9x = 9$
 $x = 1$

$$\delta_2 =$$



1, 2 2 2, ...

(A, d)

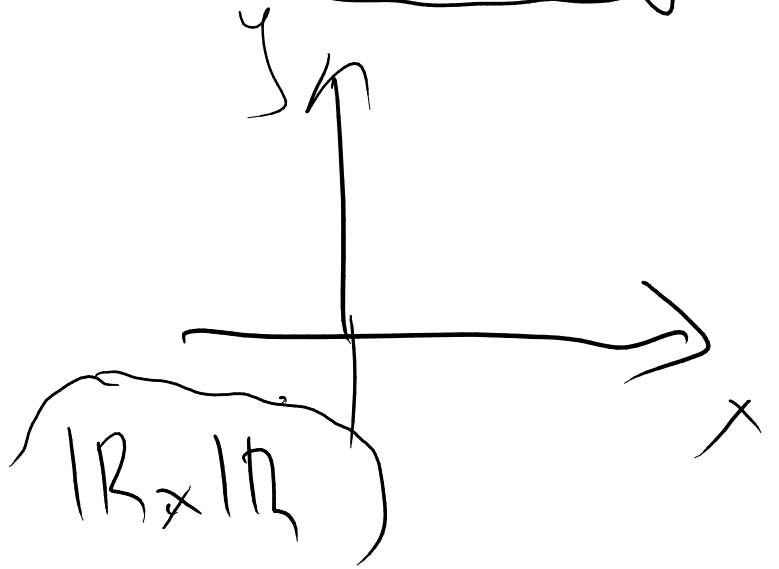
1) метрика — функция расстояния

2) метрика — метрический тензор

\mathbb{R}^n

\mathbb{R}

\mathbb{R}^n





(\mathbb{R}, d)

$$d(a, b) = |a - b|$$

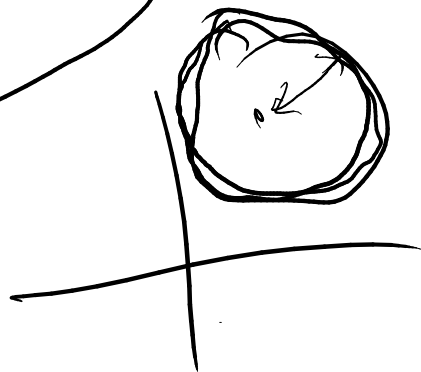


$$A = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

$$1) \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

$$d((a,b), (c,d)) =$$

2)



$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$



$$\sqrt{(x-y)^2 + (x'-y')^2} \leq \sqrt{(x-z)^2 + (x'-z')^2} + \sqrt{(z-y)^2 + (z'-y')^2}$$

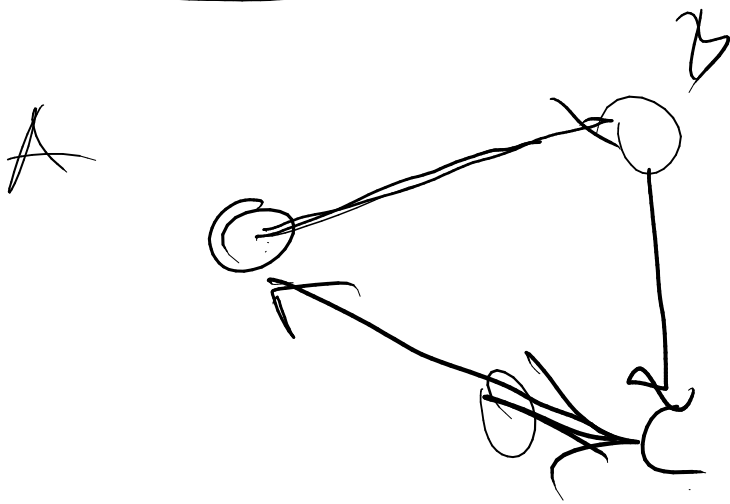
$$(x-y)^2 + (x'-y')^2 \leq$$

$$(x-z)^2$$

Hamming distance

a, b — двоичные слова

$d(a, b)$ — мин-во различающихся
битов



$d(A, B)$
время пути
