21 декабря

Задача 1.8. Счетно ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$? Счетно ли множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

A счетно $\Leftrightarrow$ $\exists$ биекция $f: A \rightleftarrows \mathbb{N}$

$\{a, a, b\} \Leftrightarrow \{(a, 2), (b, 1)\}$

Определение 3. Замкнутым отрезком (интервалом) называется множество $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$. Интервалом (иногда говорят *открытым* интервалом) называется множество $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$, то есть это отрезок без его крайних точек.

Задача 1.9. * Докажите, что замкнутый отрезок и открытый интервал равномощны.

$[a, b] \subset \mathbb{R}$

замкнутый отрезок

Указание. Рассмотрите отображение, которое на числах вида $\frac{1}{2^n}$ действует следующим образом: $f: \frac{1}{2^n} \mapsto \frac{1}{2^{n+1}}$, а на всех остальных числах тождественным, то есть:

$f(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, \text{ для } x = \frac{1}{2^n} \\ x, \text{иначе} \end{cases}.$$

$f: [0, 1] \to [0, 1)$

$\frac{1}{2^m} \xmapsto{f} \frac{1}{2^{m+1}}$

$x \mapsto x$

$\forall x \in [0,1]$

$x = \frac{m}{n}$ $\quad \frac{1}{q} = 2^{m}$

$\frac{1}{3} \mapsto \frac{1}{3}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f: [0,1] \longrightarrow [0,1)$

$\mathbb{N} \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\forall x \quad \frac{1}{2^1} < x < \frac{1}{2^0} \quad f(x) = x$

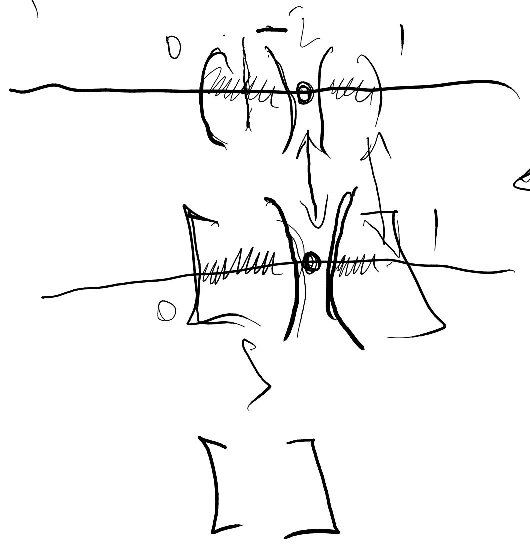
$1, 2, 3, \dots$

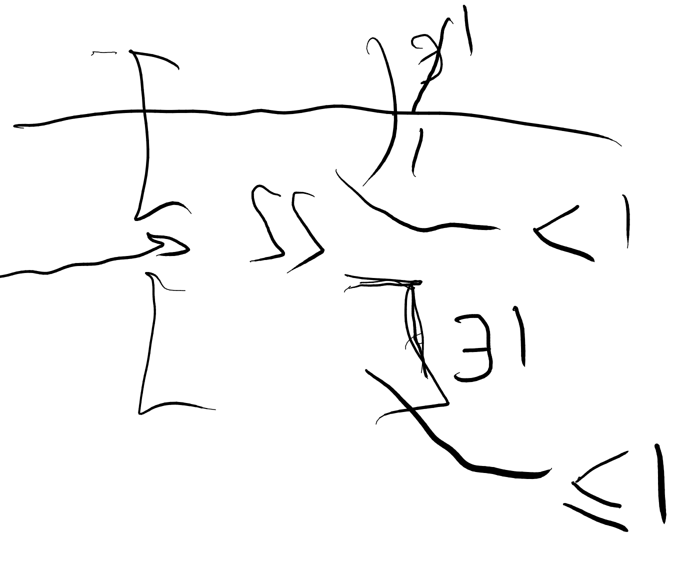
$a, 1, 2, 3$

$[0,1] \approx [0,1)$

$\forall x \quad \frac{1}{2^n} \mapsto \frac{1}{2^{n+1}}$

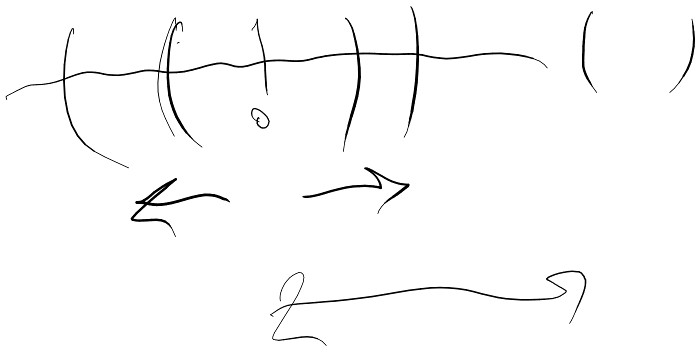
$1 \mapsto \frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{4} \mapsto \frac{1}{8} \mapsto$





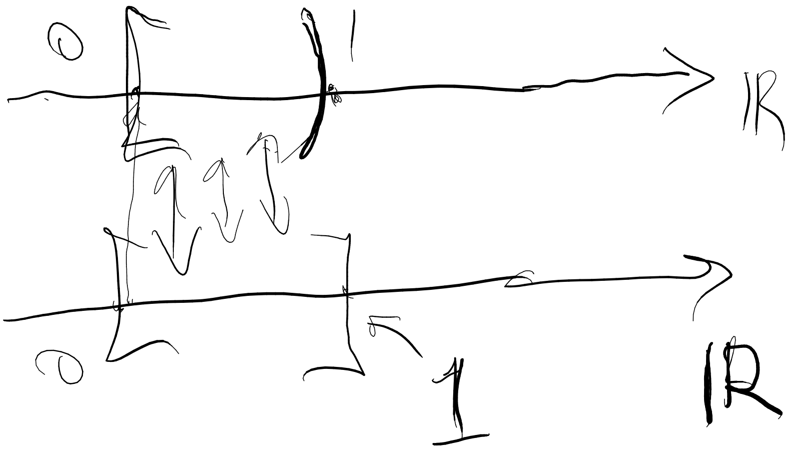
$[a,b)$

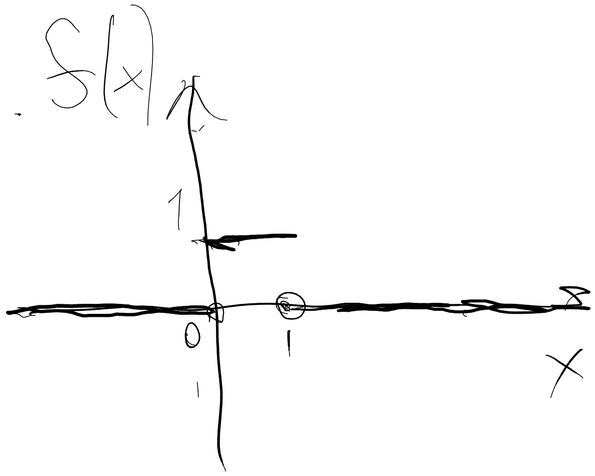
$[a,b]$



$A = [0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le 0 < 1\}$

$B = [0,1]$





$g(x) = x$

$\mathrm{char}_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$

$[0,1] \simeq [0,1)$

$\downarrow g$

$[0,\tfrac{1}{2})\ [\tfrac{1}{2},1]$

Задача 1.11. Сколько существует подмножеств у множества из n элементов?

Указание. Если $A \subset B$, то характеристической функцией подмножества A называется функция $\chi_A : B \longrightarrow \{\text{да}, \text{нет}\}$ в двухэлементное множество, которая на элементах множества A равна "да", на всех остальных элементах равна "нет". Рассмотрите такие функции.

$|A| = n \quad A = \{a_1; a_2 \ldots a_n\}$

$\varnothing, \{a_1\}, \{a_1, a_7, a_{10}\} \ldots$

1 2 3

Ответ: $2^n = |\mathcal{P}(A)| = |2^A|$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_n$

да нет да да

$B \ni a_1, a_3, a_4$

$A \xrightarrow{f} \{\text{да}, \text{нет}\} \Leftrightarrow B = \{x \in A \mid f(x) = \text{да}\}$

$|A| = n \qquad |M| = 2 \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

$|X| = m$ $|Y| = n$

$X = \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$

$Y = \{y_1 \ldots y_n\}$

$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m} = n^m$

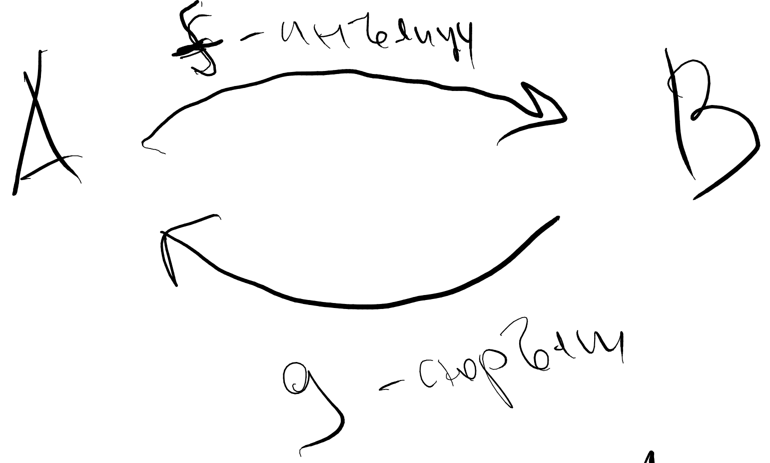
$\{$красн., зелен., стол$\} = A$

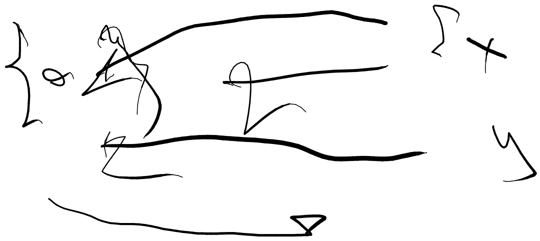
$\emptyset$, $\{к\}$, $\{з\}$, $\{стол\}$, $\{к, з\}$, $\{к, с\}$, $\{з, стол\}$, $\{кр, з, стол\}$

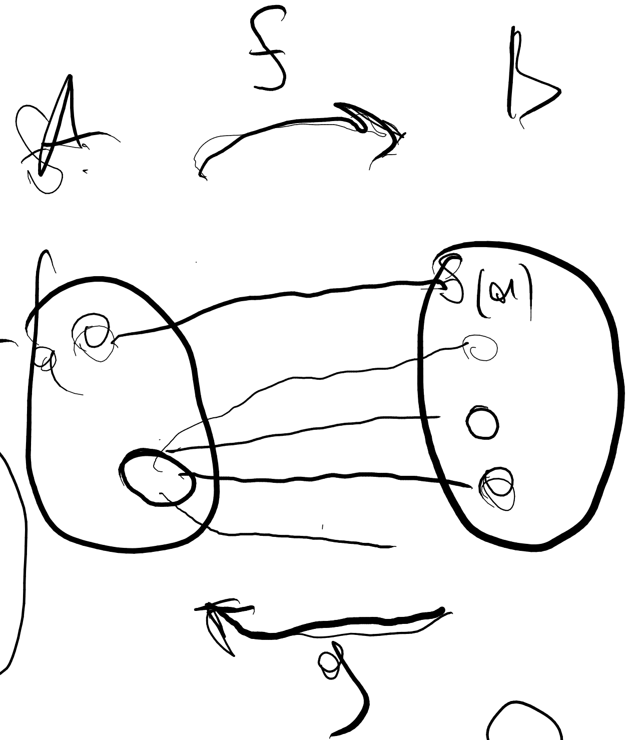
1 2 3 4 5 6 7 8

$2^3 = 8$

Задача 1.12. * Пусть $f : A \to B$ инъекция, а $g : B \to A$ сюръекция. Докажите, что между A и B существует биекция.







$$A \sim B \iff \exists f: A \to B,\ \exists g: B \to A$$

Вопрос: можно ли найти инъекцию $B \to A$?

Структурный подход

$\mathbb{Z}, +, \times, \leq$ $\quad <$ $\quad \leq$

$a \times (b + c) = ab + ac$

1940

A, B, C

$A, B \to D$

Не существует множества всех множеств.

$U \to \boxed{U \ni U}$

$U \to U \not\ni U$

1.
2.
3.
4. $\varphi \mapsto \varphi'$
5
6
7
8
9

{стол, красный, [illegible]}

Теория категорий

Топологическое пространство — (X, τ)

Метрическое пространство $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

м/н

definition

(A, d) $d: A \times A \to \mathbb{R}$

мн-во метрика ρ

$d(a,b)$ — расстояние между a и b

1) $\forall a, b \in A$ $d(a,b) = d(b,a)$ — симметричность

2) $\forall a, b \in A$ $d(a,b) \geq 0$

$d(a,b) = 0 \iff a = b$

3) $\forall a, b, c \in A$ $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

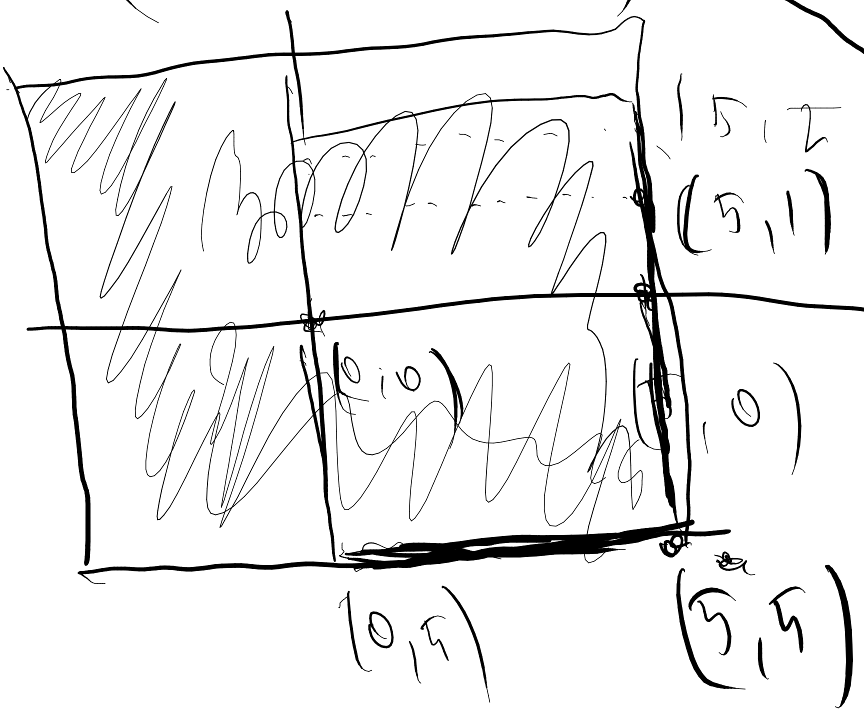
$\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

$\mathbb{R}^2$

$$d\big((x_1,y_1)\ (x_2,y_2)\big) = \sqrt[2]{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

4) $\mathbb{R}^2$

$$d\big((x_1,y_1)\ (x_2,y_2)\big) = \max\big(\underbrace{|x_2-x_1|}_{\geq 0},\ \underbrace{|y_2-y_1|}_{\geq 0}\big)$$



$\max(5,2)=5$

5) $\{a, \ldots, я\} = \mathcal{A}$

$\sqcup$

A — {конечные слова в алфавите $\mathcal{A}$}

(A, d)

$d(\alpha, \beta)$ = кол-во несовпадающих букв

декабрь

НОС␣␣␣␣

$\rho(\alpha, \beta) = 1$

МАЙ

МАЙ

$\alpha \quad \frac{1}{2}$