30 ноября

Теорема Кантора–Бернштейна

1) A, B $\qquad |A| \leq |B|$, если $\exists$ инъекция $A \xrightarrow{f} B$

2) $|A| = |B|$, если $\exists$ биекция $A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$

$$|A| = |B| \overset{1}{\Longrightarrow} \underbrace{|A| \leq |B|}_{f} \text{ и } \underbrace{|B| \leq |A|}_{f^{-1}}$$

$$|A| \leq |B| \text{ и } |B| \leq |A| \Longrightarrow |A| = |B|$$

1) $\exists\, i_1$: маленький круг $\to$ квадрат

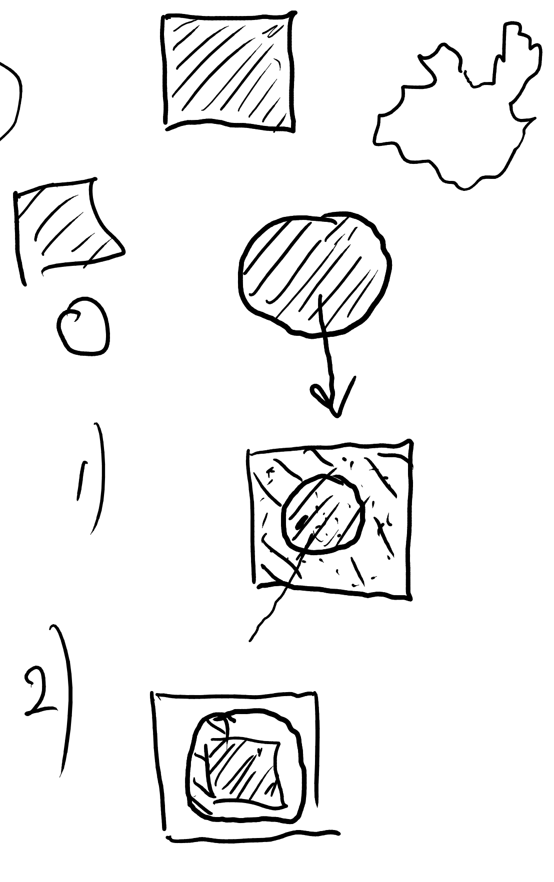
$$x \overset{i}{\longmapsto} x$$

из круга $\qquad$ из квадрата

2) $\exists\, i_2$: маленький кв. $\to$ круг

$$x \longrightarrow x$$

из кв. $\qquad$ из круга



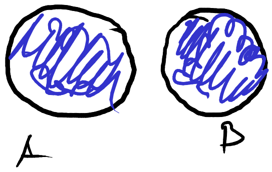
Сделайте вывод о композиции биекций.

Задача 1.4. Пусть $A_i = \{i, i+1\}$ (например, $A_{23} = \{23, 24\}$), найдите количество элементов следующих множеств:

a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

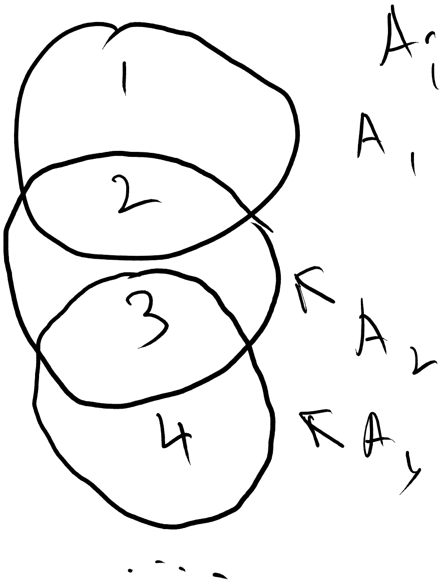
AUB



1.4.

а) $\bigcup_i A_i = ?$

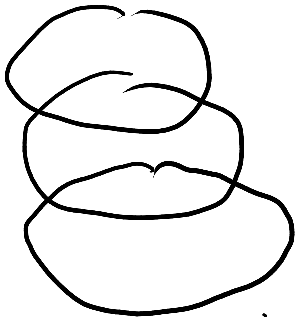
множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в какое-то из множеств объединения



$A_i = \{i, i+1\}$

$n \in A_n$

б) $\bigcap_i A_i - ?$



$\bigcap_i A_i$

Все элементы, которые лежат одновременно во всех A_i

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$\{2\}$ $\varnothing$

$A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1} \cap A_n,$

$A_{n+2} \cap B,$

$x \in \bigcap_i A_i \Rightarrow \forall n \; x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

"что-то верно для бесконечности" $\Longleftrightarrow$ "что-то верно для произвольно большого (конечного) n"

Задача 1.6. Докажите, что разбиение множества $A = \sqcup_i B_i$ на непересекающиеся множества

$$\forall i \forall j \; i \neq j \; B_i \cap B_j = \emptyset$$

задает отношение эквивалентности на множестве A. Что является фактормножеством по этому отношению эквивалентности $A/\sim$?

$X \ni x, y, z \ldots$

$x \sim y$

1) $\forall x, \quad x \sim x$

2) $\forall x, y \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x$

3) $\forall x, y, z \quad x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$1 \leq 7$
$7 \leq 9 \Rightarrow 1 \leq 9$

$(\mathbb{Z}, \sim)$

$n \sim m$, если

$12k \quad -12 \sim 0 \sim 12 \sim 24 \sim 36$

0

0, 1

$0 - 1 = -1 \not\vdots\, 12$

$0 - 2$

1
2
3
4

$12k+5 \quad 5 \sim 17 \sim 29 \sim 41$

6
7
8
9
10
11
12

$12k+8$

....

Если X и отношение экв. $\sim$ на X, то фактормножеством $X/_\sim$ называется множество классов эквивалентности

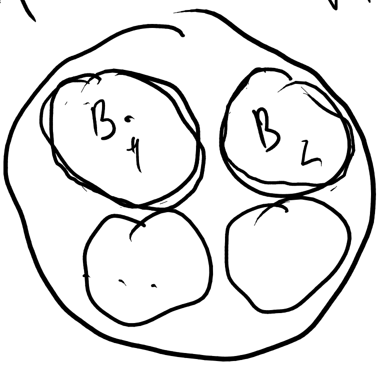
$[0], [1], \ldots [11]$

Задача 1.6. Докажите, что разбиение множества $A = \sqcup_i B_i$ на непересекающиеся множества

$$\forall i \forall j \; i \neq j \; B_i \cap B_j = \emptyset$$

задает отношение эквивалентности на множестве A. Что является фактормножеством по этому отношению эквивалентности $A/\sim$?

A $\quad \forall i \neq j$

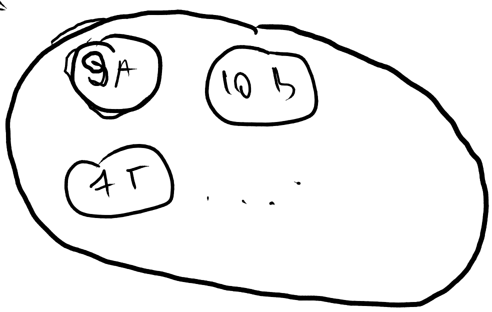


$B_i \cap B_j \neq \emptyset$

Пли определить $\forall a_1, a_2 \in A$

$a_1 \sim a_2$

A



$\alpha \sim \beta$, если

α учится с β в одном классе

"9А"

"10Г"

$[\alpha] = 9$ "Б"

α учится в 9"Б"

Задача 1.6. Докажите, что разбиение множества $A = \sqcup_i B_i$ на непересекающиеся множества

$$\forall i \forall j \; i \neq j \; B_i \cap B_j = \emptyset$$

задает отношение эквивалентности на множестве A. Что является фактормножеством по этому отношению эквивалентности $A/\sim$?

$\forall \alpha \in A \; \exists i : \alpha \in B_i$

$\alpha \sim \beta \iff$ "α и β" лежат в одном B_i

1) $\alpha \sim \alpha$

2) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$

3) $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

$A/_\sim$ — ?

$A/_\sim = I$

$A = \bigsqcup\limits_{i\in I} B_i$

$[\alpha] \to B_{i_1}$

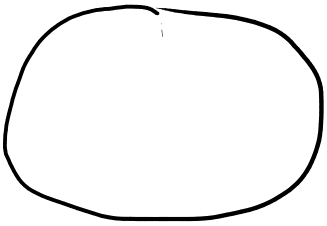
$[\beta] \to B_{i_1}$

$[\alpha] \neq [\beta]$

B_{i_1} $\quad B_{i_2}$

Задача 1.7. Пусть множество A содержит 2023 элемента, каких подмножеств у него больше: 1011-элементных или же 1012-элементных?

Указание. $1011 + 1012 = 2023$.



2023

1011

1012

$A \supset C$ — 1011

$\supset B$ — 1012

X — все 1011-эл. подмножества A

Y — все 1012-эл. —"— A

$$|X| \overset{<}{\underset{>}{=}} |Y|$$

$$2^{2023} = 2^{1011} \cdot 2^{1012}$$

1000 и 1023

$A \supset$

$C_1 \longleftrightarrow |A \setminus C| = 1012$

1011

$C_2 \longleftrightarrow$ $A \setminus C_1$ — 1012

$C_3 \longleftrightarrow$

$\vdots \quad \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$

$|A| = 6$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2 4

$\{1\}$ $\{2\}$ ... $\{6\}$

$\{2, 3, 4, 5, 6\}$

$\{1, 3, \dots, 6\}$

$\{1 \dots 4 \dots 6\}$

...

без 4

без 6

$\{2, 4\}$

$\{1, 4, 5, 6\}$

Задача 1.8. Счетно ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$? Счетно ли множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счётно $\mathbb{N}^2$

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

$(1,1)^1$ $(1,2)^2$ $(1,3)$ $\to 5$

$(2,1)^3$ $(2,2)^4$ $(2,3)$

$(3,1)^6$ $(3,2)^8$ $(3,3)^9$

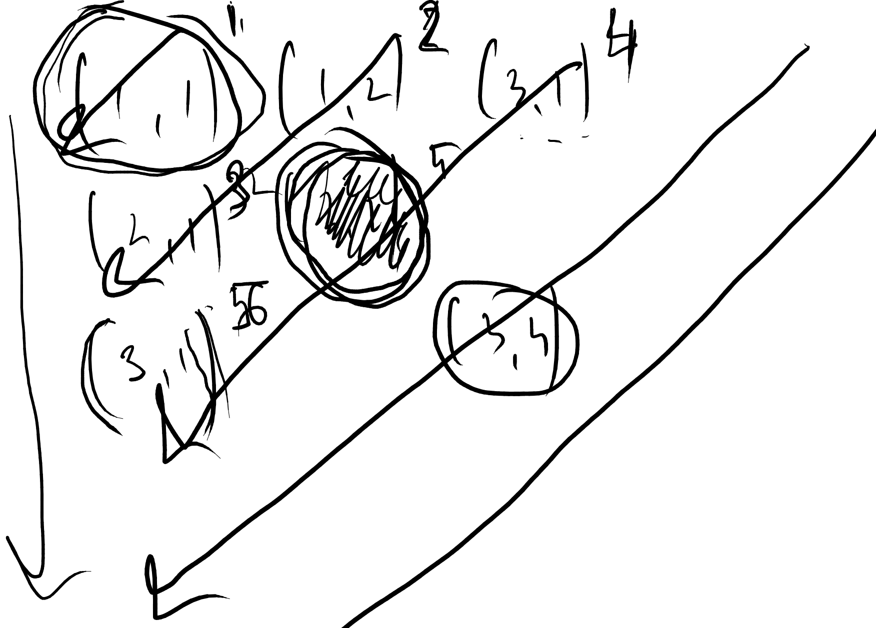
$(4,4)^{16}$

$\mathbb{Z}$

(m, n)

$2,2 \mapsto 5$

$3,1$



(km, kn)

$\frac{2m}{2n} = \frac{m}{n} \mapsto (m, n)$

$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$

$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = \frac{1}{1}$

$\mathbb{Q} \subset \boxed{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

Задача 1.10. Почему в определении множества не учитывается кратность вхождения элементов?

$\{a, a, a, b\}$

$\{a, b\}$

$\{a, b, c\} = X$

мультимножество

множество

$X \times \mathbb{N}$

$\{a, a, b, b, b, c\} \to A$

$\{a, a, b, b, c\} \to B$

$\{(a,2), (b,3), (c,1)\}$

$\neq$

$\{(a,2), (b,2), (c,1)\}$