22 ноября 2023

theorem (Cantor)

$\forall$ множества X верно $\left|2^X\right| > |X|$

$\{a_1, a_2, a_3 \ldots a_n\}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$A, B \qquad \{b_1 \ldots b_m\}$

$X = \mathbb{N}$

$2^{\mathbb{N}} = \{010100\ldots, \quad = \{\text{функции } A \to B\} = B^A$

m^n

$\underline{A \subset \mathbb{N}} \Longleftrightarrow \underline{\mathrm{char}_A(x)} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

$\underline{\underline{\mathbb{N} \to \{0, 1\}}}$

$\mathrm{char}_{\varnothing}(x) = 0$

A, B равномощны $\overset{\text{def}}{\Longrightarrow}$ между A и B $\exists$ биекция

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$

$\wr$

$\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} (1,1)^{1} & (2,1)^{3} & \ldots \\ (1,2)^{2} & (2,2)^{4} & \ldots \\ & 6 & \\ \ldots & \ldots & (3,3) \end{array}$$

$2^{\mathbb{N}}$ — несчетно

∞ ∞

$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$

несчетно счетно

$\frac{m}{n}$ $\sqrt{2}$

π e

Алфавит $A = \{а, б, \ldots, я, \_\}$

слово — конечная последовательность элементов из алфавита.

Вопрос: какова мощность множества всех слов алфавита A

1) $|\{слова\}| \geq |\mathbb{N}|$ $|\{слова\}| = \infty$

2) $\{а < б < в, \ldots, \_\}$

привет > аааааа

$a < б$, ... — $< aa < аб < \ldots$

1 2 3 ......

< — — —

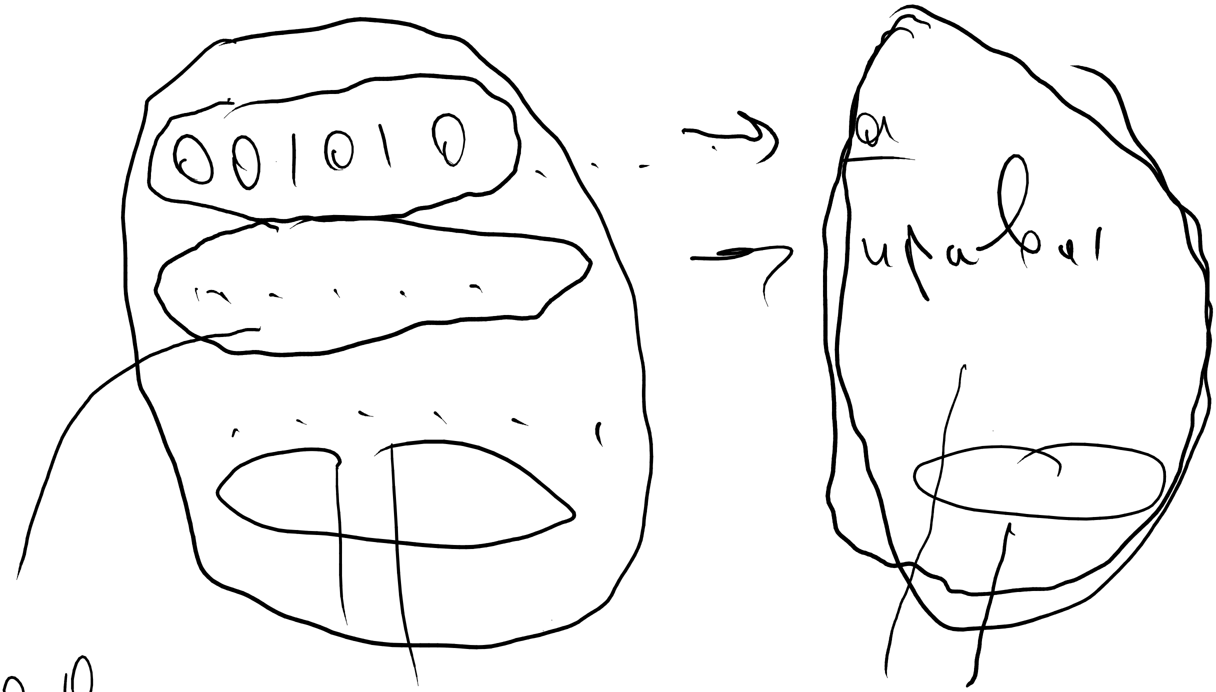
$\{a\}$

$\{слова\} \longleftrightarrow \mathbb{N}$

$\{слова\}$ счётны

$2^{\mathbb{N}}$ несчётно

$x \in 2^{\mathbb{N}}$



001000

$\{0, 1\}$

$A, B \qquad |A| = |B| \iff \exists$ биекция

$|A| \le |B| \iff \exists$ инъекция $A \to B$

$$\underbrace{|A| \leq |B|}_{\exists \text{ ин. } A \to B} \text{ и } \underbrace{|B| \leq |A|}_{\exists \text{ ин. } B \to A} \Longleftrightarrow \underbrace{|A| = |B|}_{\exists \text{ биекция}}$$

$\Leftarrow$ $|A| = |B| \Rightarrow \exists\, f$ инъекция $A \to B$

и g $B \to A$

$\exists h : A \to B$

$h : A \to B$

$h^{-1} : B \to A$

$\Rightarrow$

Theorem (Cantor - Bernstein)

A, B произвольные мн-ва

$\exists A \xrightarrow{f} B$ $\quad f, g$ инъекции $\Rightarrow \boxed{\exists h: A \to B}$

$\exists B \xrightarrow{g} A$

1. Пусть A, B конечны

$A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$

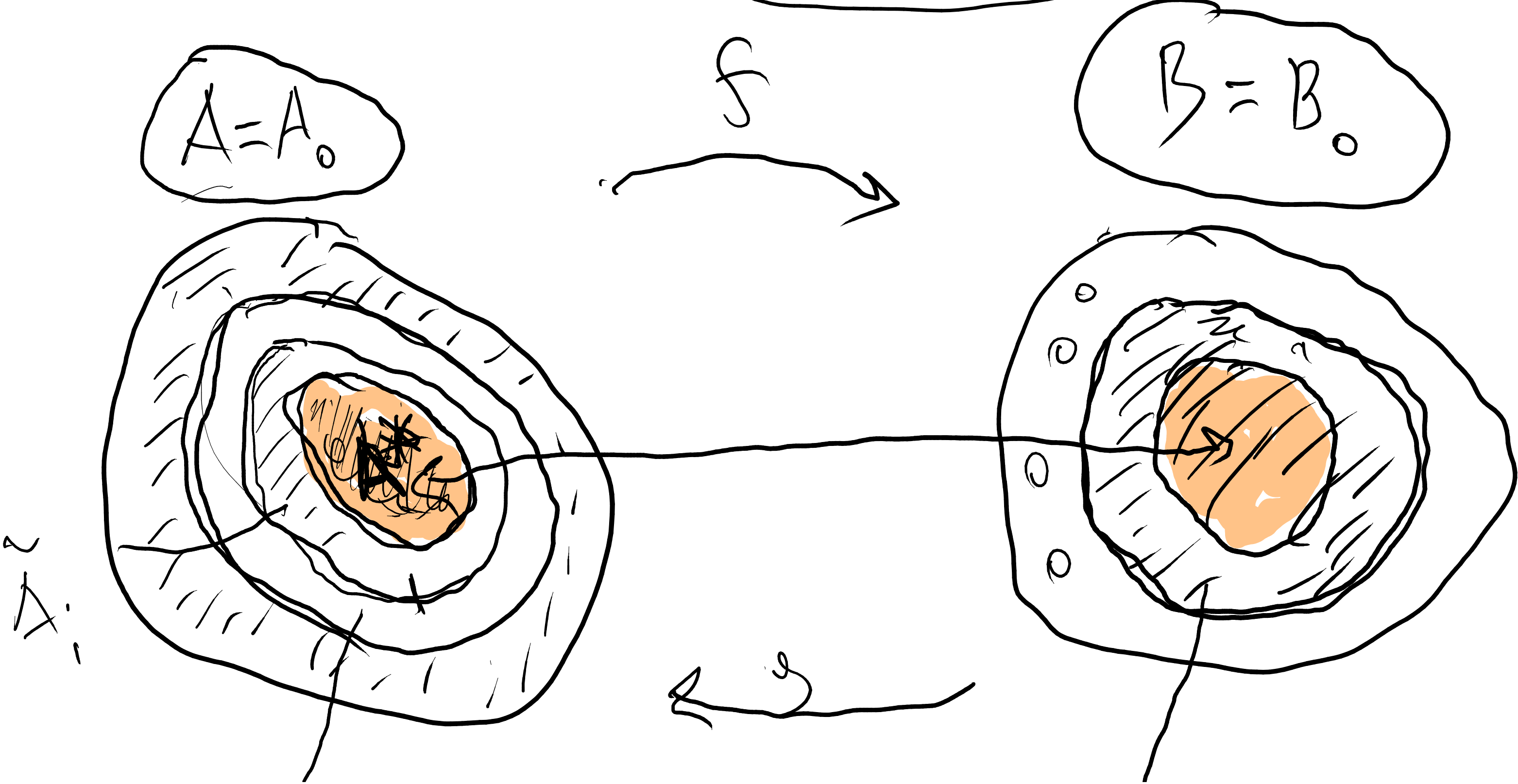
$B = \{b_1 \dots b_n\}$

$f(a_1)\ f(a_2)\ ..\ f(a_n)$

$g(f(a_1))$

2. A, B бесконечны

$\cup \qquad \cup$



$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \qquad B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \dots$$

$g(B_0) = A_1$ $\qquad B_1 = f(A_0)$

$g(B_1) = A_2$ $\qquad B_2 = f(A_1)$

$g(B_2) = A_3$

$$A_n = g(B_{n-1})$$

3.

1) если $\exists n : A_n = A_{n+1} \Rightarrow$ теорема доказана

2) $\forall n \quad A_n \neq A_{n+1} \Rightarrow \forall n \quad A_n \setminus A_{n+1} \neq \varnothing$

---

4. $X = A \cup B \qquad A \overset{f}{\sim} C$

$Y = C \cup D \qquad B \underset{g}{\sim} D$

верно ли, что $\boxed{X \sim Y}$?

$X \overset{h}{\sim} Y$

$x \in X$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A \\ g(x), & \text{если } x \in B \end{cases}$$

$$\{1,2\} \quad \{2,3\} \quad X = \{1,2,3\}$$

$$\{\alpha,\beta\} \quad \{\gamma,\delta\} \quad Y = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$$

$$X = A \sqcup B \longrightarrow A \cap B = \emptyset$$

$$Y = C \sqcup D \quad Y = \bigsqcup B_i$$

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \; : \; A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i,j$$

$$\forall \; x \in X \Rightarrow x \in \bigsqcup A_i \Rightarrow x \in A_n$$

$$f_n(x) \in B_n$$

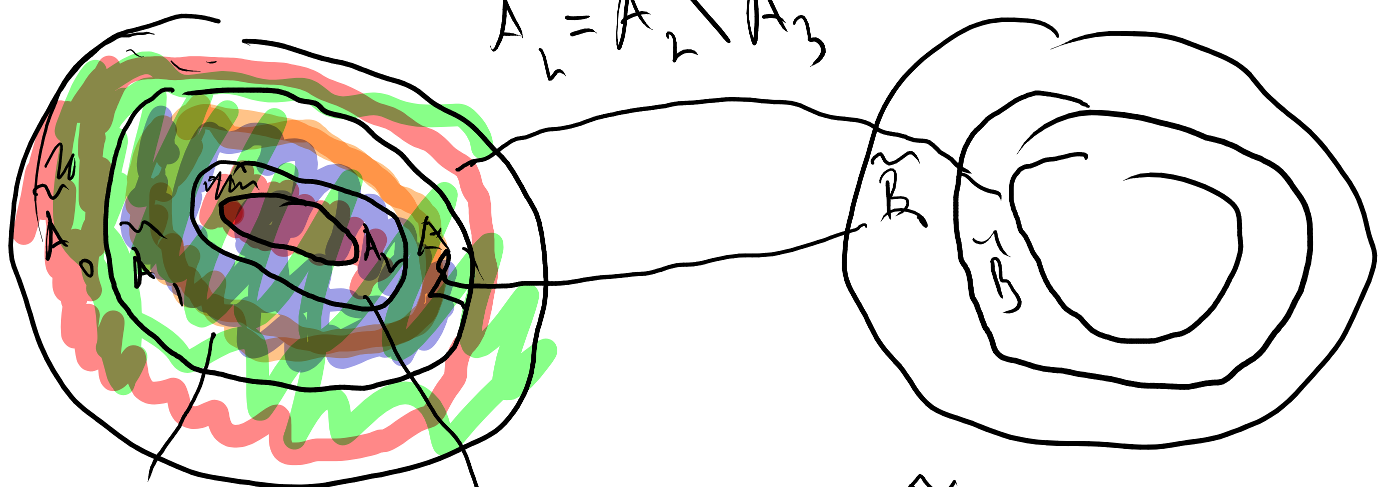
5.

$$\underline{\tilde{A}_0} = (A_0 \setminus A_1) \neq \emptyset$$

$$\tilde{A}_1 = A_1 \setminus A_2 \neq \phi$$

A_0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ B_0

$$\tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_3$$



A_1 $\qquad\qquad$ A_2

$$\tilde{B}_i = B_i \setminus B_{i+1}$$

$$\coprod_{i=0}^{\infty} \tilde{A}_i \sim \coprod_{i=0}^{\infty} \tilde{B}_i$$

$\tilde{A}_0$ $\qquad$ $\tilde{B}_0 = B_0 \setminus B_1$

$A_1 \setminus A_2 = \tilde{A}_1$ $\qquad$ $\tilde{B}_1$

$\parallel \qquad \parallel$

$g(B_0)$ $g(B_1)$

A_2 $\qquad$ B_2

A_3 $\qquad$ B_3

$$\tilde{A}_0 \sqcup \tilde{A}_1 \sim \tilde{B}_0 \sqcup \tilde{B}_1$$

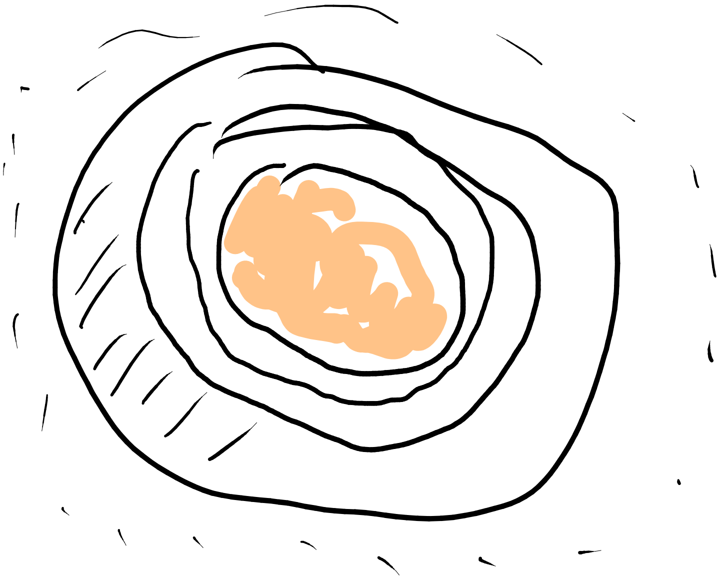
$$\bigsqcup \tilde{A}_i \sim \bigsqcup \tilde{B}_i$$

A

$$A_0 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i \sqcup A^*$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i$$

$$B_0 = \bigsqcup B \sqcup B^*$$



A_i — круг радиуса $1+\frac{1}{i}$

A_1 — 2

A_2 — $\frac{3}{2}$

A_3 — $\frac{4}{2}$

$\bigcap A_i \supseteq$ круг радиуса 1

$$\boxed{\begin{aligned} A^* &= \bigcap A_i \\ B^* &= \bigcap B_i \end{aligned}}$$

$a \in A^* \Rightarrow \forall n \quad a \in A_n$

$f(a) = b$

$$\forall i \quad f(A_i) = B_{i+1}$$

$$\forall i \quad f(a) \in B_{i+1}$$

$$\Rightarrow f(a) \in B^*$$

$$f(A^*) \subset B^* \qquad A^* \to f(A^*) \quad B^*$$

$$g(B^*) \subset A^* \qquad g(B^*)$$

$\exists f: A \to B$ инъекции
$\exists g: B \to A$ $\Rightarrow$ $\exists h: A \to B$
$h^{-1}: B \to A$

$|A| \le |B|$

$|A| = |B|$

1) "все множества"

$\sim$

$A \sim B \Leftrightarrow \exists$ биекция

Мощность множества A

$\stackrel{def}{=}$ все мн-ва, равномощные A

Утверждение

Множества всех множеств не существует.

$\mathcal{U} = \{$множества$\}$

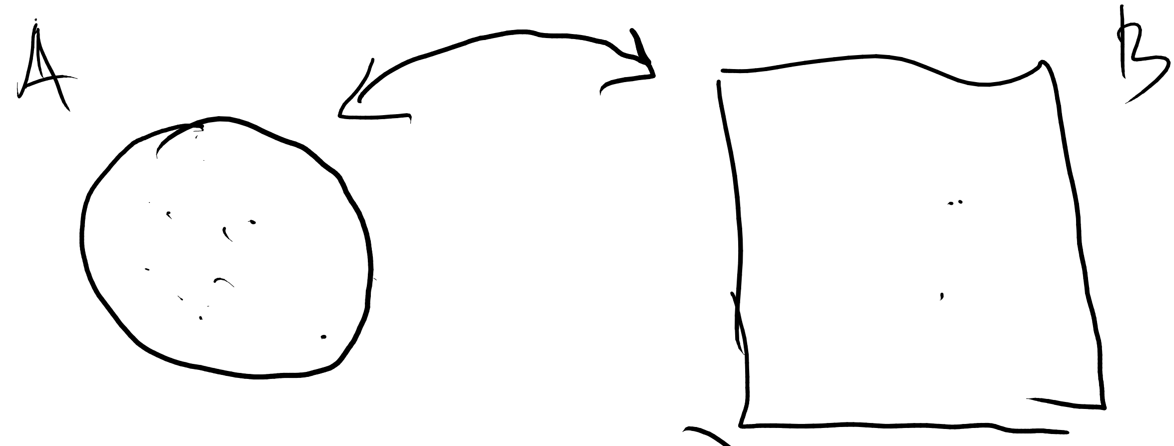
$\mathcal{U} \in \mathcal{U}$

2) A, B, C, D

$\{x\}$ — $\{1\}$

$\{x, y\}$ — $\{1, 2\}$

$A \sim \mathbb{N}$



$\exists f: A \to B$ — биекция

$\exists \alpha: A \to B$ инъекция

$\beta: B \to A$ инъекция