14 ноября 2023

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$

A B

$\{a_1, a_2, a_3\}$ $\{b_1, b_2\}$

$\cancel{B \prec A}$ $\cancel{A \prec B}$

$\{a_1, a_2, a_3\}$

Для конечных множеств верно:

A, B

i) $A \xhookrightarrow{f} B$, f инъективна $\Rightarrow |B| \geq |A|$

ii) $B \setminus f(A) \neq \emptyset$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$

Для любых мн-в A, B верно

$\exists f: A \to B$, f инъекция $\Rightarrow |A| \leq |B|$

1) $\exists g: A \to B$ g биекция $\Rightarrow g$ инъекция

$g^{-1}: B \to A \Rightarrow g^{-1}$ инъекция

$|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$ $\Leftarrow$ $|A| = |B|$

$\Rightarrow$

2) X, Y $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ f, g инъекции

$|X| \leq |Y|$

$|Y| \leq |X|$ $\Rightarrow |X| = |Y| \Leftrightarrow \exists h: X \to Y$

h биекция

theorem Cantor-Bernstein.

Диагональный аргумент Кантора

1) Множество бесконечных последователь-ностей из "0" и "1" не является счетным.

$\alpha = \alpha,$

000 . . . .

1, 2, 3, 4 . . .

↓ ↓ ↓

0 1 0 0 1 1 . . .

$\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$

$\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \dots$

$\beta : \mathbb{N} \to \{0,1\}$

$\forall n \quad \beta(n) = 0$

Что значит, что мн-во A (бесконечное) несчётно?

Предположим обратно, то есть $\exists f : X \to \mathbb{N}$

f — биекция

$X = \{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\}$

$$\begin{array}{l|llll}
\alpha^1 & \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \alpha^1_3 & \ldots \\
\alpha^2 & \alpha^2_1 & \alpha^2_2 & \alpha^2_3 \quad \alpha^2_4 & \ldots \\
\alpha^3 & \alpha^3_1 & \alpha^3_2 & \alpha^3_3 & \ldots \\
\alpha^4 & & & & \\
\ldots & & & & \\
\beta & & & &
\end{array}$$

$\alpha^1_1 = 0$

$\beta_1 = 1$

$\alpha^2_2 \neq \beta_2$

β_n

$\beta = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \in X$

$$\beta_n = \overline{\alpha^n_n} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha^n_n = 1 \\ 1, & \text{если } \alpha^n_n = 0 \end{cases}$$

$\beta = \alpha^k$ $\qquad$ $\beta_n \neq \alpha^n_n \quad \forall n$

$\Rightarrow$ у β не может быть никакого номера n

$\Rightarrow$ наше предположение о существовании биекции $X \longleftrightarrow \mathbb{N}$ абсурдно.

$\nexists f$: биекция между $\mathbb{N}$ и {бесконечные последов. из "0" и "1"}

$\mathbb{N} < X$

пример несчетного мн-ва

---

2) $X \longleftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$

$\alpha \longleftrightarrow A \subset \mathbb{N}$

$\ldots \overset{2}{\longleftrightarrow} \ldots$

α 000 . . . . 0 . . . . $\rightsquigarrow$ $A \subset \mathbb{N}$

β 1 0 1 0 1 0 . . . . $\rightsquigarrow$ B

γ 1 1 1 0 0 0 0 $\rightsquigarrow$ C

$f: 2^{\mathbb{N}} \to X$

$A \subset \mathbb{N}$ {$\overset{1}{\text{"выбираю"}}$ $\overset{0}{\text{"не выбираю"}}$}

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\} \xrightarrow{f}$ $f(x) =$ "выбираю"

$x \in A$

$f(1)\ f(2)\ f(3),\ f(k) \ldots \sim F$

1 1 1 0 0 0 $\{1,2,3\}$

$F \ni 1, 2, 3$

$\{$функции $\mathbb{N} \to \{0,1\}\} \overset{h}{\longleftrightarrow} \{$подмножества $\mathbb{N}\}$

$= 2^{\mathbb{N}}$

$f \overset{h}{\longmapsto} \{x \mid f(x) = 1\}$

$char_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ такая, что $char_A = 1$ на элем. A

$= 0$ на $\mathbb{N} \setminus A$

$f(1)\ f(2) \ldots$

$\{$функциями $\mathbb{N} \to \{0,1\}\} \longleftrightarrow \{$бесконечные последов. из "0" и "1"$\}$

$2^{\mathbb{N}} \not\sim \mathbb{N}$

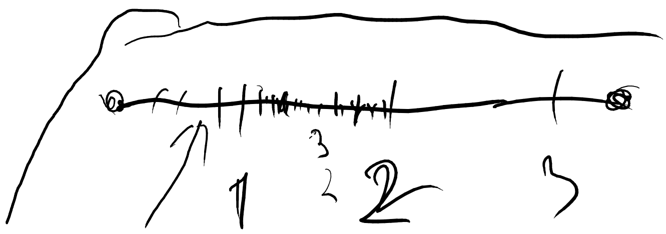
$2^{\mathbb{N}} \succeq \mathbb{N}$

$|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$

$x \mapsto \{x\}$

0011. . . .

10, 0. . . . .



$\frac{a}{b}$ $\quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{17}{5}$

$\mathbb{Q} \overset{\text{definition}}{=} \mathbb{N}\times\mathbb{N} / \sim$

$(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc$

$\frac{6}{2} \sim \frac{3}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{4}{8}$

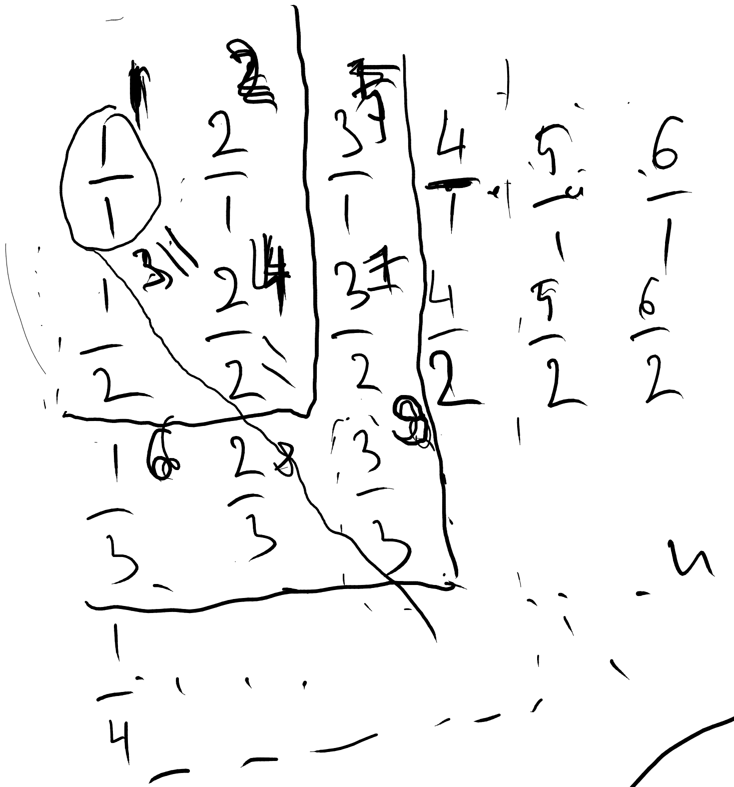
$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$

$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ — счётное

1 (15, 7)

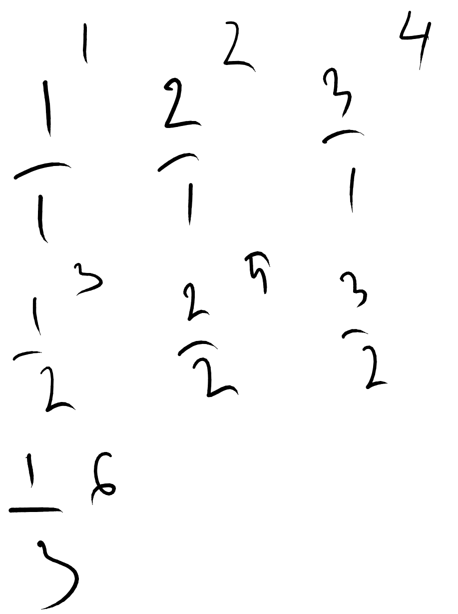
2 (. . . .

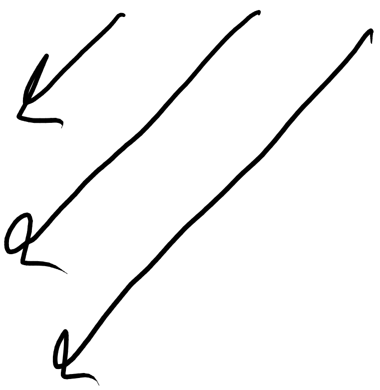
3 (. .)



$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

7 5 3 1 2 4 6

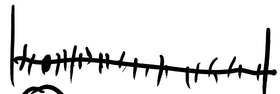




$\Rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ — счётно

∀ бесконечного $|X \times X| = |X|$

0,1000000000 $\rightarrow \frac{1}{10}$

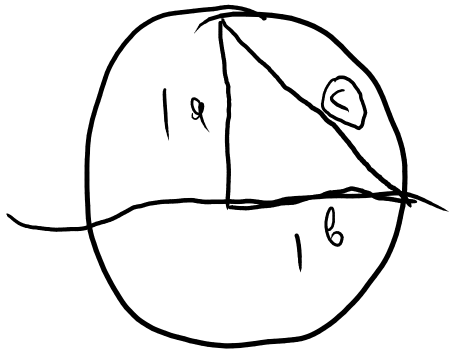


$\frac{1}{10} = 0{,}10000$

0,1234111 ......

1010

ℝ несчетно



$a^2+b^2=c^2$

$1^2+1^2=c^2 \Rightarrow c^2=2$

$c=\sqrt{2}$ $\qquad$ $c\in\mathbb{R}$

$c\notin\mathbb{Q}$ $\qquad$ $c\neq\frac{a}{b}$ $\qquad$ $\sqrt{2}$ не рациональное

$1<\sqrt{2}<2$

$1<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$

Предположим $c=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$

$c=\frac{m_1}{n_1}$

$c^2=2 \Rightarrow \frac{m_1^2}{n_1^2}=2 \Rightarrow m_1^2=2n_1^2$

$2\cancel{4}k^2 = \cancel{2}n_1^2$

$2k^2 = n_1^2$

$n_1^2 \vdots 2 \Rightarrow n_1 \vdots 2$

$m_1^2 \vdots 2$

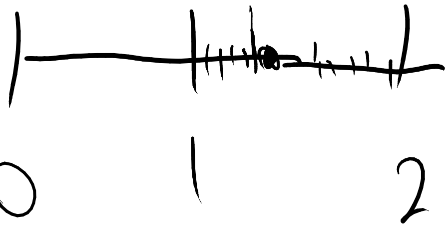
$\downarrow$

$m_1 \vdots 2$

$m_1 = 2 \cdot k$

$m_1^2 = 4 \cdot k^2$

$\sqrt{2} = 1,\underbrace{4142}.....$



$0,876876....$