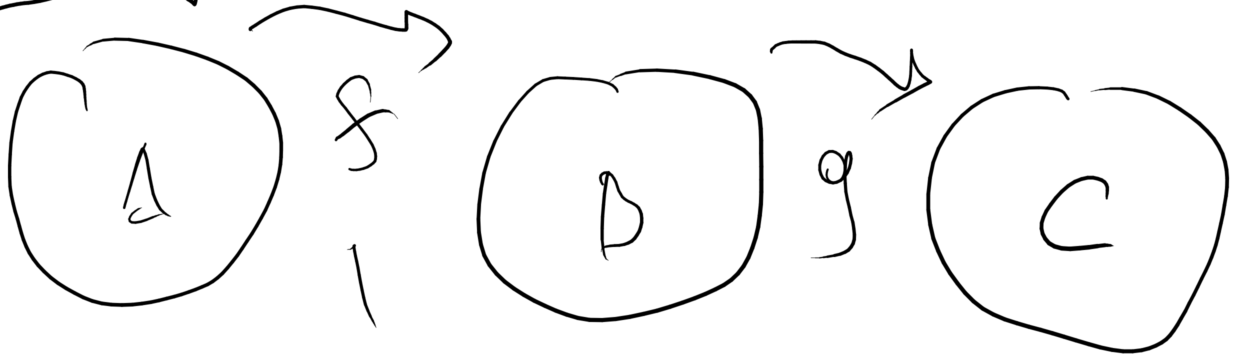
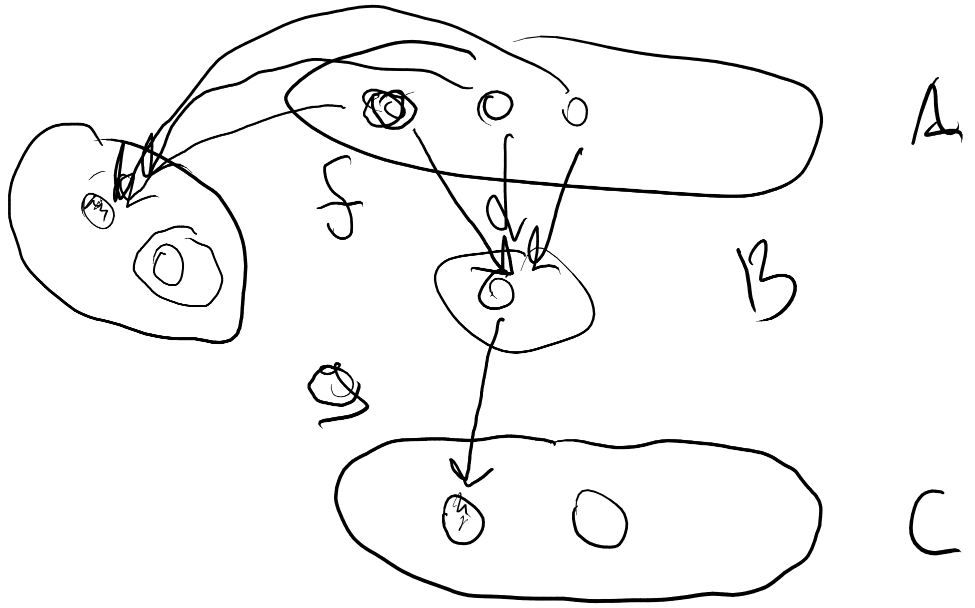
9 ноября



сюръекция инъекция

$g \circ f$



1.4.

$\{a_1, a_2 \dots a_n\} = A$

$\mathbb{N} = \{1, 2 \dots\}$

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, \dots\}$

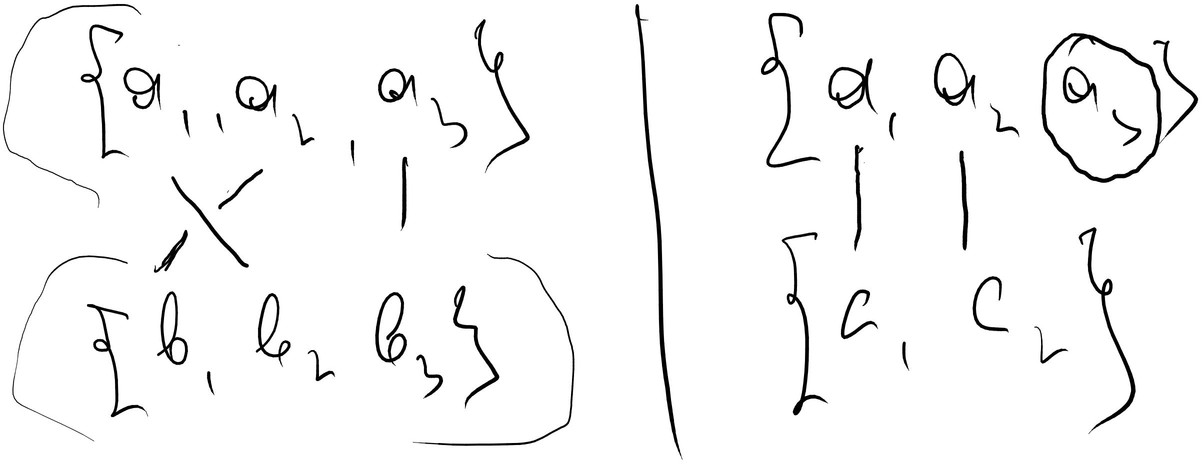
$A \setminus \{a_1\}$

$A \setminus \{a_1, a_2\}$

...

$A \setminus \{\dots\} = \varnothing$

...



Если между множествами $\exists$ биекция, то они имеют одинаковое "количество" элементов.

Theorem

Не существует биекции из множества в его булеан (множество всех подмножеств).

$$\{a_1, a_2, a_3\} = A$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \dots$$

$\dots$

$|A|$ = "кол-во элементов"

$\uparrow$

мощность A

$B \sim \mathbb{N} \iff \exists f: B \to \mathbb{N}$ биекция

$\{a_1\}$ — 1

$\{b_1, b_2\}$ 2

3

$\dots$

$\dots\dots$

B — $\mathbb{N}$

$\wedge$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$

A счетно $\iff A \sim \mathbb{N}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots\dots$

$1 \quad 2 \quad 3$

$\mathbb{Z} = \{\dots -1, 0, 1, 2, \dots\}$ $const_1$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ $const_2$

$\dots$

$2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$f: 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$2a \mapsto a$

$g: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$

$a \mapsto 2a$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2\}$

$B \subset A$

$A \setminus B \neq \emptyset$

$= \{3, 4\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\cup$

$\mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

$x \mapsto -x$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 2 \quad 3$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, \cancel{0}, 1, 2 \ldots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3 \ldots\}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$$

$$\{2, 4, 4, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z}_+$$

$$\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+ \sim \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$2\mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup \{\text{нечетные числа}\}$$

$$\{-1, -2, -3, \ldots\}$$

$$\{1, 3, 5, \}$$

$$f: x \mapsto -2x-1$$

$$\ldots -2, -1, 1, 2, 3 \ldots$$

$$1, 2, 3, 4, 5$$

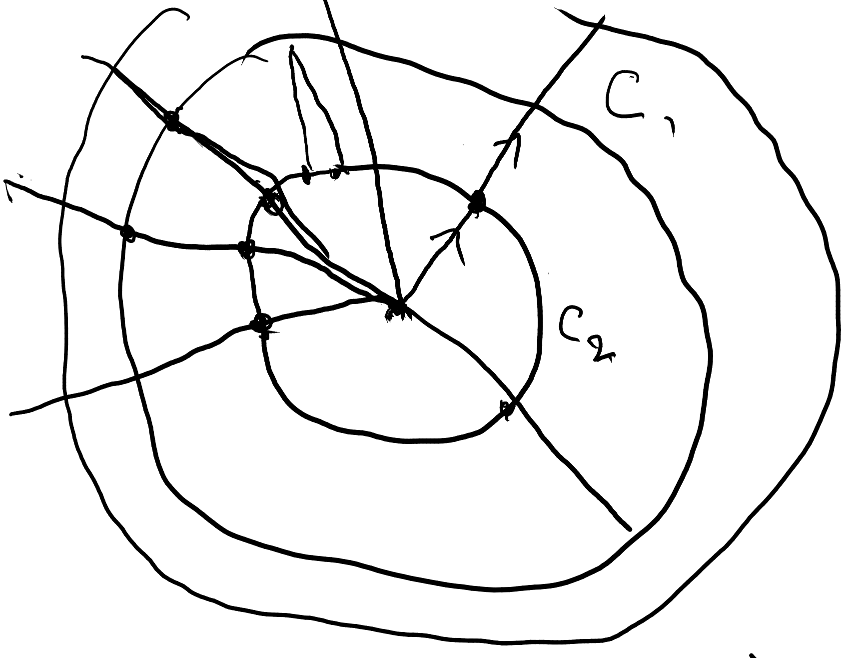
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} \sim \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots$

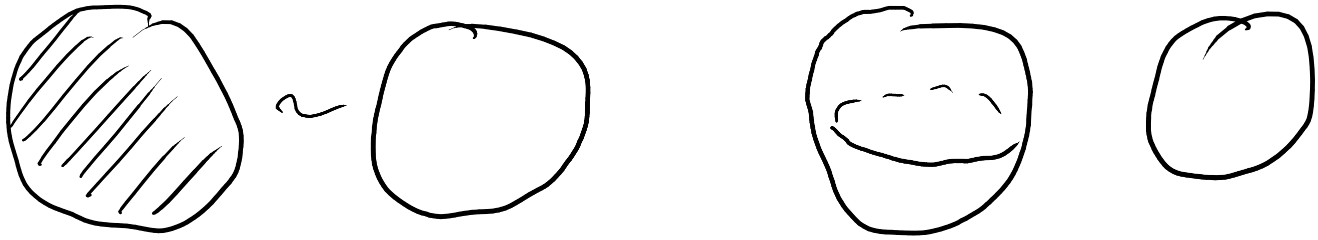
$0 - 1 - 2 \dots$

$\{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$

$\{1, 2, 3, 4$

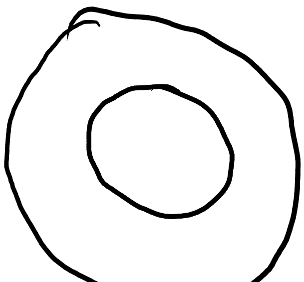
$\mathbb{Z}$ счётно

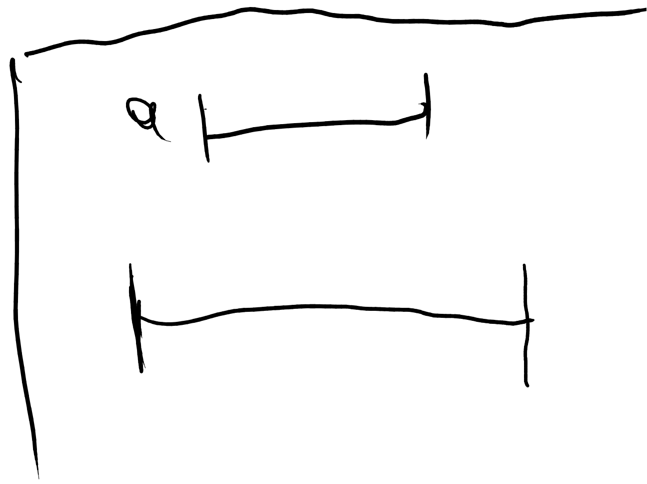


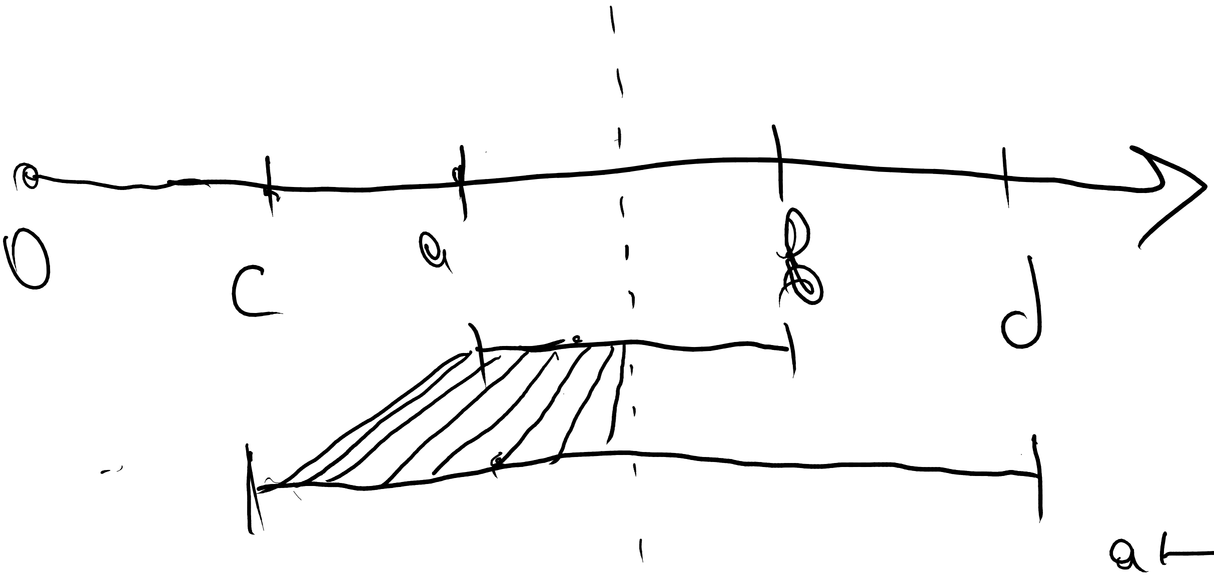


"количество"
≠
"объем"

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{0\}$







$a \mapsto c$
$b \mapsto d$

$\alpha x + \beta$

$A = \{x \mid a \le x \le b\}$

$B = \{x \mid c \le x \le d\}$

$\alpha a + \beta = c$

$\alpha b + \beta = d$

$\beta = d - \alpha b$

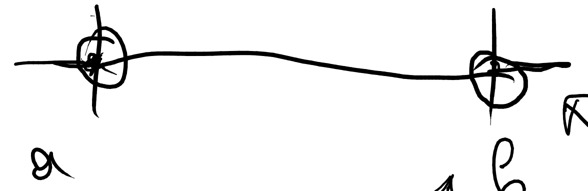
$\alpha a + d - \alpha b = c$

$\alpha(a - b) = c - d$

$\alpha = \frac{c-d}{a-b}$

$\frac{c-d}{a-b}x + \left(d - \frac{c-d}{a-b}b\right)$

$\frac{d-c}{b-a} \ldots$

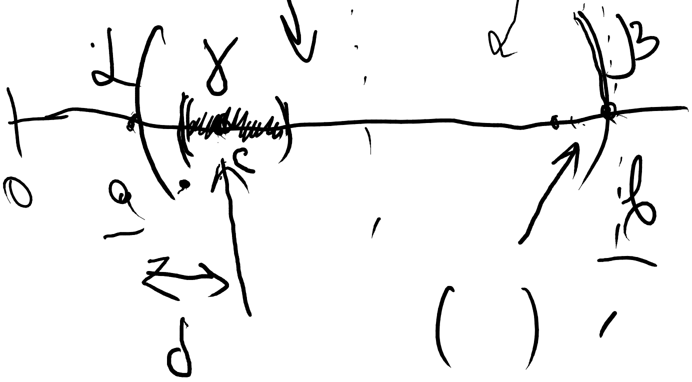


$= \{x \mid a \leq x \leq b\} = A$

замкнутий інтервал

$a < x < b + 2$

$a - 1 <$



$= \{x \mid a < x < b\} = B$

$A = B \cup \{\alpha, \beta\}$

$\gamma \in B \Leftrightarrow \underline{a < c < b}$

c

$c - a \neq 0$

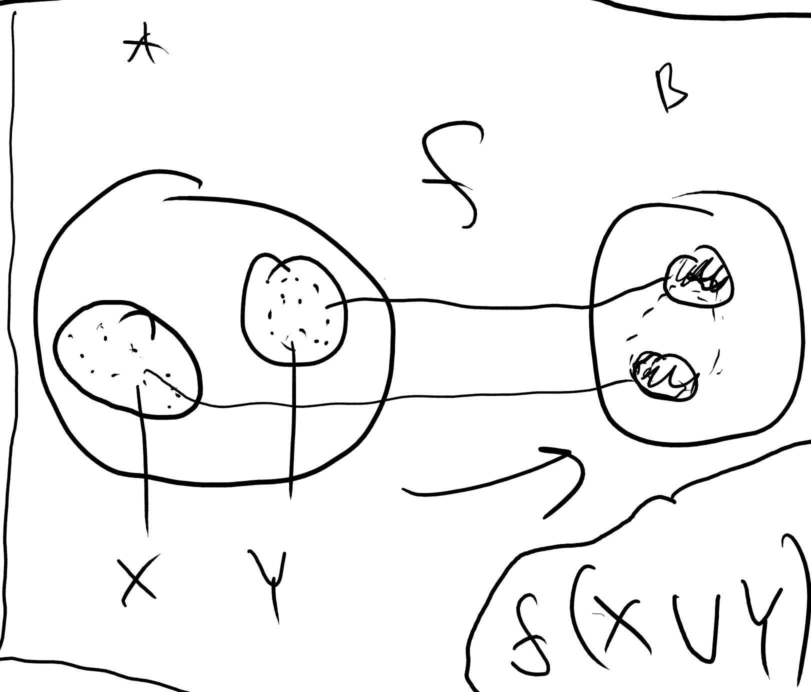
$\frac{1}{1000}$

$d = c - a$

$y = \frac{d}{2}$

$c - y \in B$

1.



$f(X \cap Y) \stackrel{?}{=} f(X) \cap f(Y)$

$\underline{X \setminus Y}$

$f(X \cup Y) \stackrel{?}{=} f(X) \cup f(Y)$

2. $\nexists$ биекции между $\mathbb{N}$ и $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$A \xleftrightarrow{f} \mathcal{P}(A) \qquad C = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

$$\mathbb{N} \xleftrightarrow{f} \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\mathrm{char}_B : A \to \{0, 1\}$$

A

$$B \to \{0, 1\} \qquad \mathrm{char}_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin B \\ 1, & \text{если } x \in B \end{cases}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\{3\} \qquad \mathrm{char}_{\{3\}}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$$

$$2\mathbb{N} \qquad \mathrm{char}_{2\mathbb{N}} = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ нечетное} \\ 1, & \text{если } x \text{ четное} \end{cases}$$

$A \supset B \sqcup C$ $\quad B \longmapsto char_B$

$\nparallel$

$char_C$ — характеристическая функция подмно-ва C во мн-ве A

$$\mathbb{N} \underset{=}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \overset{\varphi}{\underset{=}{\longrightarrow}} \{\text{характерист. функций подмножества } \mathbb{N}\}$$

$1 \overset{f}{=} B_1 - char_{B_1}$ — $0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \ldots$

$2 \overset{f}{-} B_2 \xrightarrow{=} char_{B_2}$ $\quad 0 \ldots$

$3 \ldots \quad \vdots \quad char \ldots$

$$char_x : \mathbb{N} \to \{0,1\}$$

$|$

$\{char_x(1), char_x(2), char_x(3) \ldots$

$\quad \| \qquad\qquad \|$

0 или 1 $\qquad$ 0 или 1

$char_{2\mathbb{N}}$

$char_{\{3\}}(1) - ?$

$char_{\{>3\}}$

$2\mathbb{N}$: 0 1 0 1 0 ....

$\{3\}$: 0 0 1 0 0 ...

нет

$a_1\ a_2\ a_3 \ldots$

1: 0 0 0 1 0 0 ... $= a^1$

2: 1 0 ... a^2

3: ... a^3

...

$$a^n_n = a^n = b = \overline{a^1_1}\,\overline{a^2_2}\,\overline{a^3_3}\ldots\overline{a^n_n}$$

$$\overline{x} = \begin{cases} 0, \text{если } x = 1 \\ 1, \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Диагональный аргумент (Кантора)