24 октября 2023

$a \leq b \quad b \leq a$

A — множество

$A \ni a, b \quad a \sim b$

i) $\forall a \in A \quad a \sim a$ (рефлексивность)

ii) $\forall a, b \in A \quad a \sim b \Rightarrow b \sim a$

iii) $\forall a, b, c \in A \quad a \sim b$ и $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

0) $X \quad x \sim y \Leftrightarrow x = y$

1) Школа = {Вася, Петя, Маша, ...}

"множество" учеников

ученик a ~ ученик b $\Leftrightarrow$ когда ученики a и b учатся в одном классе

$(A, \sim)$

$a \in A$

---

definition $[a] = \{x \in X \mid x \sim a\}$ — класс эквивалентности

$\bar{a} \quad a^* \quad a$

---

1) $[a] \subset A$ 2) $a \in [a]$

$[b]$ $[c]$

Theorem.

Классы эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.

$$\forall x, y \in X \quad [x] \cap [y] = \varnothing \text{ либо } [x] = [y]$$

Доказательство. $(A, \sim)$

Пусть C, D – классы эквивалентности на A

$c \in C$

$d \in D$

Предположим $C \cap D \neq \varnothing \Rightarrow \exists \alpha \in C \cap D$

$\Rightarrow \alpha \in C = \{x \mid x \sim c\} \Rightarrow \alpha \sim c$

$\alpha \in D = \{x \mid x \sim d\} \Rightarrow \alpha \sim d$

$b \sim c \Rightarrow b \sim b$

$\Rightarrow b \in D$

из транзитивности $c \sim \alpha$ $\alpha \sim d$

$\Rightarrow c \sim d$

2. $C \cap D = \varnothing$

definition Элемент класса эквивалентности называется его представителем

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \dots\}$

$A = \{x_1, x_2\} = [x_1] = [x_2]$

Петя 5 "А" Вася 6 "б"

Маша 5 "А"

Что такое [Петя 5 "А"]

$[x] = \{x \mid$ x учится вместе с Петей из 5 "А"$\}$

$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(0,1)\ (5,6), \dots\}$

$x = (a, b) \in A$

$y = (c, d) \in A$

$x \sim y \iff a + d = b + c$

1) $\forall (a,b)$ $(a,b) \sim (a,b)$ $a + b = a + b$

$(a,b) \sim (c,d)$ если

$a + d = b + c$

2) $(a,b) \sim (c,d)$ $a + d = b + c$

$(c,d) \sim (a,b)$ $c + b = d + a$

3) $(a,b) \sim (c,d)$ — $a + \cancel{d} = b + \cancel{c}$

$(c,d) \sim (x,y)$ — $\cancel{c} + y = \cancel{d} + x$

$a + \cancel{d} + \cancel{c} + y = b + \cancel{c} + \cancel{d} + x$

$(a,b) \overset{?}{\sim} (x,y) \iff a + y = b + x$

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \ni (0,2) \sim (a,b) \sim (a,a+2) \sim (1,3) \sim (2,4) \sim (3,5)$$

$$0+b = a+2$$

$$b = a+2$$

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim} \ni (x,y)+(a,b) = (x+a,\, y+b)$$

$$(0,2)+(2,0) = (2,2) \sim (0,0)$$

$$(0,3)+(2,0) = (2,3) \sim (0,1)$$

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4\ldots\}$ $\qquad 4-3=1$

$\mathbb{Z}_- = \{-1,-2,\ldots\}$ $\qquad -2-4=-6$

$x \mapsto (x,0)$

"$-x$" $\mapsto (0,x)$

$(x,0)+(0,x) = (x,x) \sim (0,0)$

---

definition $(A,\sim)$

Фактормножество A по $\sim$ называется множество классов эквивалентности и обозначается $A/_{\sim}$

3. $\mathbb{Z}$ $\underline{12 = p}$

$\mathbb{Z} \ni a, b$ $a \sim b \iff a - b \,\vdots\, p = 12$

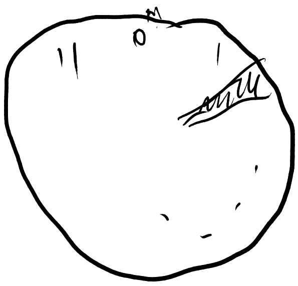
$\mathbb{Z}/_{\sim}$ $\mathbb{Z} \ni 7 \not\sim 8$ $8 - 7 \not\vdots\, 12$ $7 \sim 19 \sim 31 \sim$

$9 - 7 \,\vdots\, 12$ $\Rightarrow 6 \sim 18 \sim 30 \ldots$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = \{x + 12 \cdot k\}$

....

$18 - 7 = 11 \,\vdots\, 12$



$19 - 7 = 12 \,\vdots\, 12$

$[0] = \{0, 12, 24 \ldots\}$ $\mathbb{Z}/_{\sim}$ имеет 12 элементов

$[1] = \{1, 13, \ldots$

...

$[11] = \{11, 23, \ldots\}$

$[12] = \{12, 24 \ldots\} = [0]$

4. $\mathbb{Q}$ — рациональные числа $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{\sim}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$(a, b), (x, y) \in A$

$[(a, b)] + [(c, d)]$ $(a, b) \sim (x, y) \iff a \cdot y - b \cdot x = 0$

$(a', b') + (c', d')$

$\frac{a}{b} \sim \frac{x}{y} \iff a \cdot y - b \cdot x = 0$

$\frac{3}{6} \sim \frac{1}{2} \sim \frac{4}{8}$

$1 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 0$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} /_{\sim}$ $(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$

$f(x,y) = x+y$

$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$

$(a',b') \sim (a,b) \Rightarrow \boxed{a'+b = b'+a}$

$[(a,b)] = [(a',b')]$

$[(a',b')] + [(c,d)] \sim [(a,b)] + [(c,d)]$

$\boxed{[(a'+d, b'+c)] \sim [(a+d, b+c)]}$

$\cancel{a'} + d + \cancel{b} + c = \cancel{b'} + c + \cancel{a} + d$

$d + c = c + d$

$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$

$\frac{a}{b} + \frac{x}{y}$

A, B

$f: A \xrightarrow{\text{injection}} B$

$|A| \leq |B|$

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

$B \; \{$

$A \sim B \Leftrightarrow \exists f$ биекция $f: A \to B$

$$\frac{|A| \le |B|}{|B| \le |A|} \Rightarrow A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$$

definition

Если $A \sim \mathbb{N}$, то A называется счетным множеством

$$A = \{a, b, c \dots\} \qquad \{a_0, a_1, \dots\}$$

$$a_0 = b_1$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

f

Theorem

Пусть X — бесконечное мн-во, тогда оно содержит счётное подмножество.

Δ $x_0 \in X$

$X \setminus \{x_0\} \ni x_1$

$X \setminus \{x_1, x_0\} \ni x_2$

$\dots$

$$\{x_1, x_2, x_3 \dots\}$$

$$| \ | \ S \ | \ |$$

$$\{0, 1, 2, \dots\}$$

Существуют ли несчетные множества

definition

Несчетное мн-во это бесконечное мн-во которое не является счетным

— Лем

$$2^A = \mathcal{P}(A)$$

Theorem (Cantor)

Пусть A множество, $\mathcal{P}(A)$ — его булеан, тогда

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

$$\underline{A = \mathbb{N}} \Longrightarrow |\underline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}| \neq |\mathbb{N}|$$

Δ $A \xhookrightarrow{\text{инъекция}} \mathcal{P}(A)$ $\quad A = \{a, b, c \dots\}$

$$\underline{|A| \leq |2^A|}$$

$$2^A = \{\varnothing, A, \{a\}, \{b\},$$

$$\{a_1, \dots a_n\} = A$$

$$2^A = \{\varnothing, \{a_1\} \dots \{a_n\}, \{a_1, a_2\}$$

Вопрос о брадобрее

Брадобрей бреет всех, и только тех, кто не бреет сам себя.

1. б бреет себя $\Rightarrow$ б <u>не</u> бреет себя
2. б <u>не</u> бреет себя

Бреет ли брадобрей сам себя?

(Парадокс Рассела)

$A \xrightarrow{f \text{ биекция}} 2^A$

$X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$, $X \in 2^A$, $X \subset A$

$\{a, b, c\} \xrightarrow{f} 2^A = \{\{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$

$X \ni a, c$

$\alpha = f^{-1}(X)$, $\alpha \in A$

$\alpha \mapsto X$

$2^{\mathbb{N}}$ — несчетно

$\alpha \in X$? $\alpha \in A$, $X \subset A$

1. $\alpha \in X$

$\alpha \in \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$

$f(\alpha) = X$

$\alpha \notin X$

2. $\alpha \notin X$, $X = f(\alpha)$ $\Rightarrow$ $\alpha \in X$

$\mathbb{N}$, $2^{\mathbb{N}} = A_1$, $2^{A_1} = A_2 \dots$

$\mathbb{N} \lneq 2^{\mathbb{N}} < 2^{(2^{\mathbb{N}})} < \dots$

Существует ли B: $|\mathbb{N}| < |B| < |2^{\mathbb{N}}|$

Континуум-гипотеза

1940 Курт Гёдель

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \cup 1$

$A = \mathbb{N} \times \{1\} = \{(0,1)\ (1,1)\ (\ldots$

$B = \mathbb{N} \times \{2\} = \{(0,2)\ \ldots\}$

$A \sqcup B$ — счётно да оно?

$A \cap B = \varnothing$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетном

$\cup = \sqcup$