19 октября 2023

$\{a, b, c\} = A$

функции
гомоморфизмы
морфизмы

$f: A \to A$

оператор

$A \subset B$

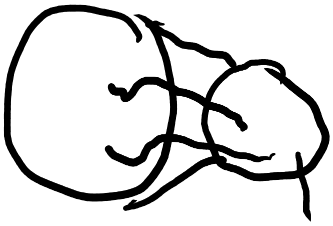
$A = B \iff A \subset B$ и $B \subset A$

$f: A \to B$

инъективные: $\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

сюръективные $\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad f(a) = b$

биективные: одновременно инъективные и сюръективные



B

A – множество

$\mathcal{P}(A)$ или 2^A – множество всех подмножеств A

$\{1,2,3\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,1\}\ \{2,3\}\ \{1,3\}\ \{1,2,3\}\}$

Композиция функций

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

$$a \longmapsto f(a) \xrightarrow{g} g(f(a)) \longrightarrow h(g(f(a)))$$

$f : A \to B$ $\qquad g \circ f : A \longrightarrow C$

$g : B \to C$ $\qquad g \circ f\,(x) = g(f(x))$

f, g, h $\qquad h \circ (\underline{g \circ f}) = h \circ g \circ f$

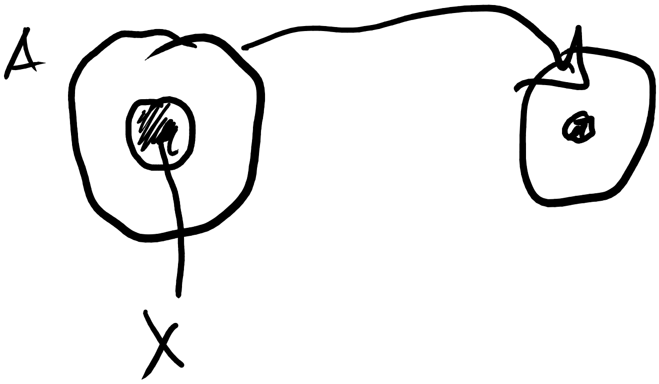
$(h \circ g) \circ f$

$$A \ni a \longmapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)) \longmapsto h(g(f(a)))$$

$$a \longmapsto f(a) \longmapsto (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

$A \xrightarrow{f} B$

$a \mapsto f(a)$



$f(A) \subset B$

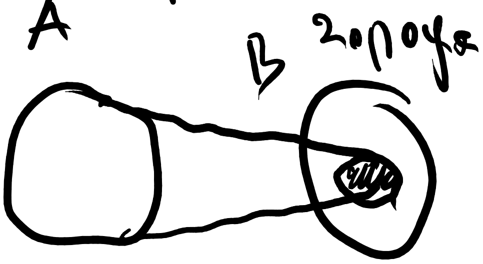
$\{\text{страны}\} \xrightarrow{f} \{\text{города}\} \xrightarrow{g} \{\text{буквы кириллицы}\}$

f: страна $x \mapsto$ столица страны x

Страна 1 $\longmapsto$ столица 1

$\neq$

Страна 2 $\longmapsto$ ст. 2



g: город $x \mapsto$ 1ая буква названия

$g \circ f : \{\text{страны}\} \to \{\text{буквы}\}$

$(g \circ f)(\text{Россия}) = $ "М"

Отношения на множествах

$\&$ A — множества

$a \& b$

1) $\forall a \in A \quad a \& a$ (рефлексивность)

2) $\forall a, b \in A \quad a \& b$ и $b \& a \Rightarrow a = b$

3) Транзитивность:

$\forall a, b, c \in A \quad a \& b$ и $b \& c \Rightarrow a \& c$

$\& \doteq \leq$

1) $\forall a \quad a \leq a$

2) $\forall a, b \quad a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$

3) $\forall a, b, c, \quad a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

1. $(\mathbb{N}, \leq)$

$\mathbb{N} = \{1 \leq 2 \leq 3 \leq \ldots\}$

0. $a \leq b \Leftrightarrow a = b$ $\quad \{a, b, c\}$ $\quad \begin{matrix} \wedge \\ a \end{matrix} \quad \begin{matrix} \wedge \\ b \end{matrix} \quad \begin{matrix} \wedge \\ c \end{matrix}$

1.5. Алфавит $= \{a \leq б \leq в \leq г \ldots\}$

2. $(A, \leq)$ $(\mathbb{N}, \leq_2)$

$a \leq b \iff a \mid b \iff b \vdots a \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$

$b = a \cdot p_k,$

1) $\forall a \in \mathbb{N}$ $a \vdots a$

2) $\forall a, b$ $a \vdots b$ и $b \vdots a$

$a \geq_1 b$ $\Rightarrow a = b$

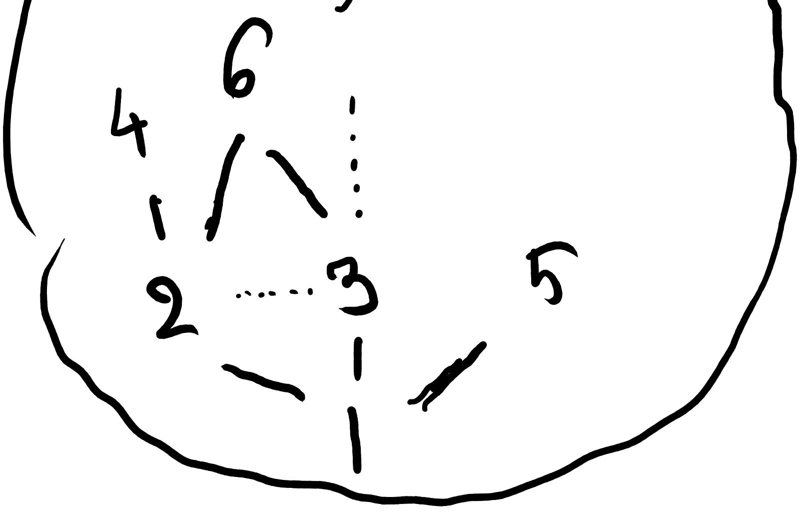
$b \geq_1 a$

3) $\forall a, b, c$

$a \vdots b$ $b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$

$\downarrow$ $\downarrow$

$a = b \cdot k$ $b = c \cdot m \Rightarrow a = c \cdot (m \cdot k)$



3. A, $\mathcal{P}(A)$ – булеан A

$A, B \in \mathcal{P}(A)$ $\quad A \le B \Leftrightarrow A \subset B$

$A = \{a, b, c\}$ $\geqslant$

$\{a, b\}$ $\quad \{a, c\}$ $\quad \{b, c\}$

$\{a\}$ $\quad \{b\}$ $\quad \{c\}$

$\varnothing$

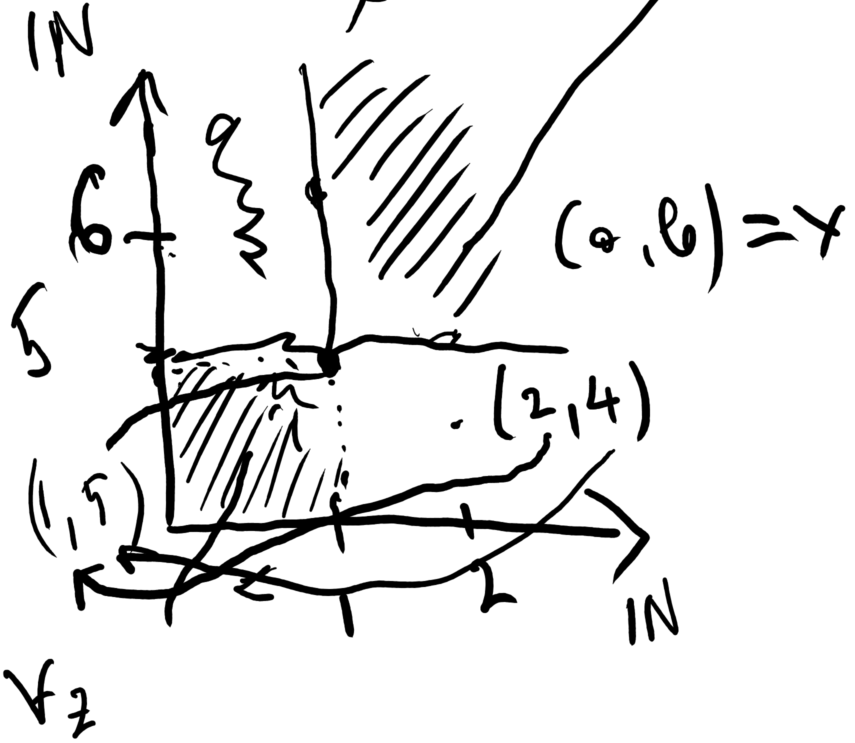
4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(a, b) \le (x, y) \Leftrightarrow$

$a \le x$ и $b \le y$

$\{y \mid y \le x\}$

$\{y \mid y \ge x\}$



$A = \{1, 2\}$ $\quad A \not\leq B$

$B = \{a, b, c\}$

definition $A \leq B \Leftrightarrow \exists f$ инъективное отображение из $A \xrightarrow{f} B$

A, B — множества

$B \supset A$

$in: A \to B$

$A \ni a \mapsto a \in B$

$$\underset{A}{\underset{\Uparrow}{a \neq b}} \Rightarrow \underset{B}{\underset{\Uparrow}{a \neq b}}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\quad g: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$

$x \mapsto 2x$

$2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$ $\quad x \neq y \Rightarrow 2y \neq 2x$

$2\mathbb{N} \leq \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \leq 2\mathbb{N}$

$A \sim B \Leftrightarrow \exists$ биекция $f: A \xrightarrow{f} B$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

$\{1, 2, 3, \dots\}$

$\{\dots -2, -1, 0, 1, \dots\} = \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

1. $A \leq B$ 2. $A \sim B$

Theorem. (Кантора - Бернштейна)

Если $A \leq B$, $B \leq A \Rightarrow A \sim B$.

иначе записав: $\exists f: A \to B$ инъективное
$g: B \to A$ инъективное
$\Rightarrow \exists h: A \to B$ биекция

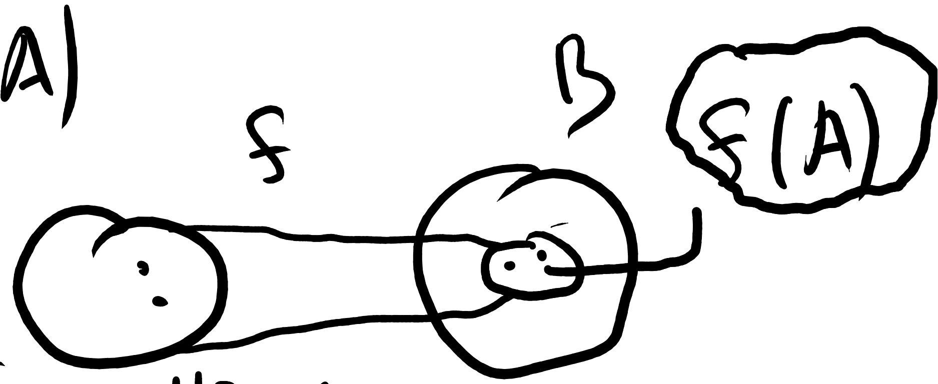
Δ $\{1, 2, 3\}$ $f(1), f(2)\ f(3)$

$\{a, b, c\}$

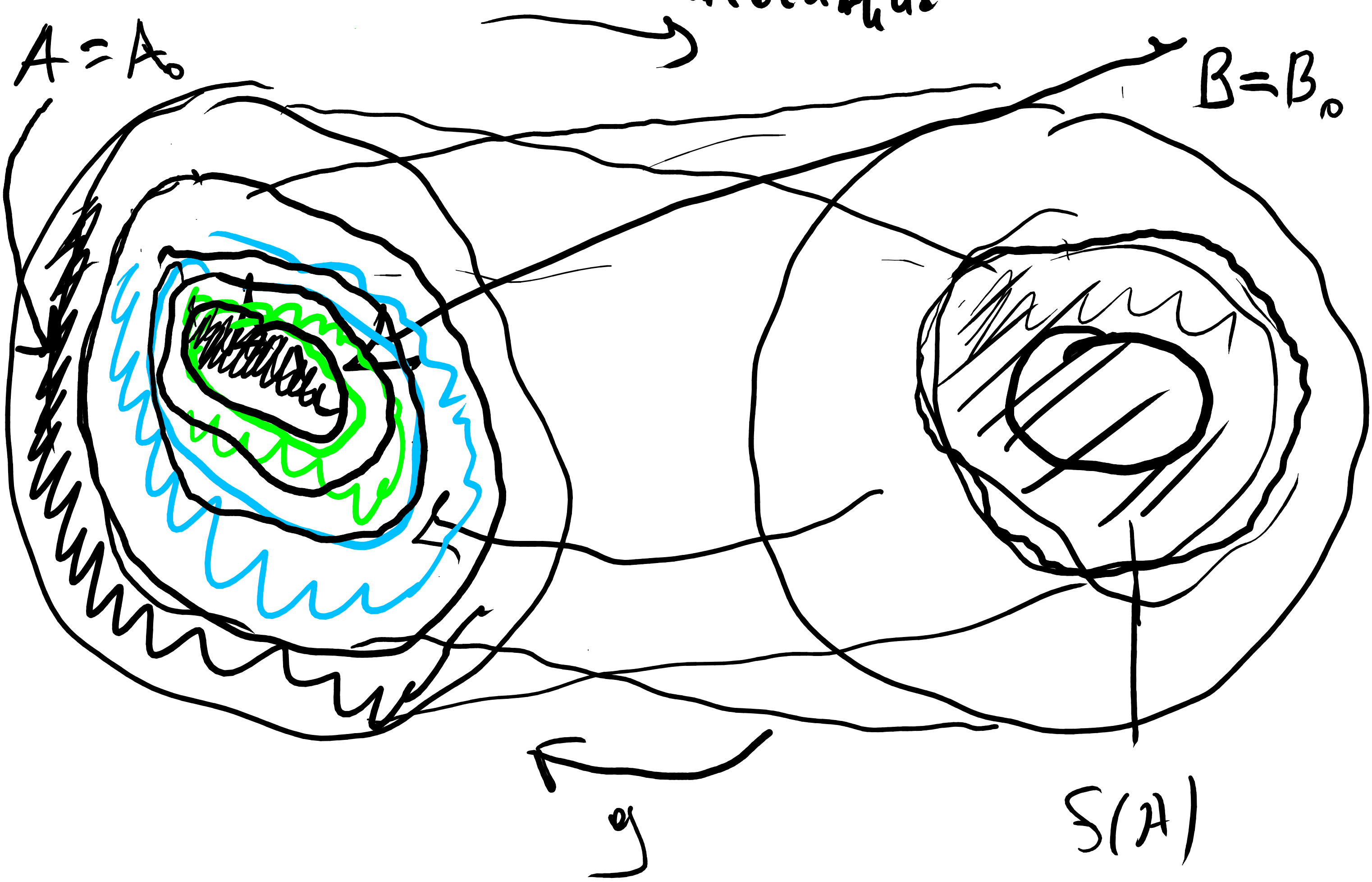
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad h: A \to B$$

Факт: $f: A \to B$ инъективно, то

$$A \sim f(A)$$



f — инъекция



$$\tilde{A}_0 = A_0 \setminus A_1$$

$$A_0 \sim B_1 \sim A_2 \sim \dots$$

$$\tilde{A}_i = A_i \setminus A_{i+1}$$

$$A = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \tilde{A}_i\right) \cup \left(C = \bigcap A_i\right)$$

$$A = \left(\bigsqcup_{i} \tilde{A}_i\right) \sqcup \left(C = \bigcap_{i} A_i\right)$$

$$\tilde{A}_i \sim \tilde{A}_{i+1}$$

$$\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j = \varnothing$$

$$i < j$$

$B = B_0$ $\quad$ $A = A_0$

$B_1 = f(A_0)$ $\quad$ $A_1 = g(B_0)$

$B_2 = f(A_1)$ $\quad$ $A_2 = g(B_1)$

$A_0 \sim B_1 \sim A_2 \sim B_3 \sim \ldots$

$B_0 \sim A_1 \sim B_2 \sim \ldots$

1. Если $\quad A_i = A_{i+1}$

то все доказано

2. $\forall i \in \mathbb{N} \quad A_i \neq A_{i+1}$

$A_i \setminus A_{i+1} \neq \varnothing$

А. Шень "Начала теории множеств"

1.5. Теорема Кантора – Бернштейна.

Отношение эквивалентности на A

1) $\forall a \in A \quad a \sim a$ (рефлексивность)

2) $\forall a, b \in A \quad a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (симметрич.)

3) $\forall a, b, c \in A \quad a \sim b$ и $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$A = \{$ученики школы$\}$

$a \sim b \Leftrightarrow a$ учится в одном классе с b

1) $\not\!\!$ 2) a в одном классе с b

$\Rightarrow b$ —//— a

3)

---

definition $(A, \sim)$

отношение эквив.

$A/\sim$ — множество классов эквивалентности

$\{a, b, c, d \ldots\} : a \sim b \sim c \sim d$

$\text{Школа}/\sim$ = {все классы школы}

11"А" 6"Б"